

**Titre:** Étude de bistabilité des bulles ellipsoïdales par une méthode ALE de  
résolution des écoulements diphasiques

**Auteur:** Simon Fortin  
Author:

**Date:** 2019

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Fortin, S. (2019). Étude de bistabilité des bulles ellipsoïdales par une méthode  
ALE de résolution des écoulements diphasiques [Master's thesis, Polytechnique  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/4005/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/4005/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Stéphane Étienne, & Cédric Béguin  
Advisors:

**Programme:** Génie aérospatial  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Étude de bistabilité des bulles ellipsoïdales par une méthode ALE de résolution  
des écoulements diphasiques**

**SIMON FORTIN**

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
Génie aérospatial

Août 2019

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Étude de bistabilité des bulles ellipsoïdales par une méthode ALE de résolution  
des écoulements diphasiques**

présenté par **Simon FORTIN**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

**Dominique PELLETIER**, président

**Stéphane ÉTIENNE**, membre et directeur de recherche

**Cédric BÉGUIN**, membre et codirectrice de recherche

**David SCOTT**, membre

## DÉDICACE

*À Robert...*

## REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord mon directeur Stéphane Étienne de m'avoir offert l'opportunité de faire cette maîtrise et de m'avoir confié ce sujet passionnant. Son optimisme aura su me garder motivé tout au long de ce projet.

Je remercie également Cédric Béguin qui m'a grandement aidé sur ce projet. Son expertise et ses connaissances m'auront permis d'en apprendre énormément et de tirer profit au maximum de mes résultats.

J'offre également un remerciement particulier à Dominique Pelletier, sans qui je n'aurais probablement jamais introduit le monde de la recherche. De plus, ces bons mots m'auront permis de me calmer dans les pires moments et me redonner confiance et estime.

Je remercie ensuite tous les membres de la Chaire de recherche, incluant David Scott et Laurent Bornard. Votre intérêt pour mon sujet m'aura grandement motivé.

Finalement, je tiens à remercier tous mes ami(e)s qui m'auront diverti tout au long de cette maîtrise.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente le développement, la vérification et la validation d'une méthode de résolution des écoulements à phases séparées. L'objectif principal de cet outil consiste à simuler avec précision les phénomènes physiques à petite échelle dans les écoulements aérés au voisinage d'une ou plusieurs bulles. La méthode est basée sur une formulation lagrangienne-eulérienne arbitraire (ALE) des équations de Navier-Stokes et la méthode des éléments finis (MEF). Une description lagrangienne de l'interface permet l'imposition directe des conditions telle que la tension superficielle. De plus, une approche monolithique d'assemblage des équations permet une résolution accrue pour les problèmes diphasiques comportant des fluides de propriétés largement différentes comme l'eau et l'air.

La méthode développée est rigoureusement vérifiée et validée à l'aide de solutions analytiques et de cas tests tels que l'oscillation d'une bulle et l'ascension d'une bulle. Les résultats démontrent la précision de la méthode ainsi que sa capacité à reproduire des phénomènes réels. On étudie également la dispersion de la vitesse d'ascension des bulles ellipsoïdales que l'on croit être un phénomène de bistabilité. On verra qu'il est actuellement impossible de tirer une conclusion à ce sujet puisque seulement des bulles rapides sont observées.

**Mots-clés :** Écoulements diphasiques, méthode de éléments finis, Lagrangienne-Eulérienne arbitraire, phases séparées, tension superficielle, bulles ellipsoïdales.

## ABSTRACT

This thesis presents the implementation, verification and validation of a method for solving separated two-phase flows. The main objective of this method is to simulate with precision small scale physical mechanics of aerated flows around one or few bubbles. The method is based on an Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation for the Navier-Stokes equations combined with the Finite Element Method (FEM). A Lagrangian description of the interface between both phases allows a direct application of interface conditions including surface tension. A monolithic approach of assembling equations leads to an accurate resolution for solving two-phase flow with large property differences such as air and water.

The developed method is rigorously verified and validated using analytical solutions and benchmark tests such as bubble oscillations and rising bubbles. Results show the method precision and its capacity to represent real life phenomena. The rise velocity dispersion of ellipsoidal bubbles was also studied which is believed to be a bistability. No conclusion can be made, however, since only fast bubbles are obtained.

**Keywords:** Separated Two-Phase Flows, Finite Element Method, Arbitrary Lagrangian-Eulerian, Surface Tension, Ellipsoidal Bubbles

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	ix
LISTE DES FIGURES . . . . .	x
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET NOMENCLATURE . . . . .	xiii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Mise en contexte . . . . .	1
1.2 Sommaire des objectifs . . . . .	3
1.3 Note sur les écoulements de bulles . . . . .	3
1.4 Plan du mémoire . . . . .	3
CHAPITRE 2 ÉTAT DE L'ART . . . . .	4
2.1 Méthodes numériques en écoulements diphasiques . . . . .	4
2.1.1 Méthodes Euleriennes . . . . .	4
2.1.2 Méthodes Lagrangiennes . . . . .	9
2.1.3 Méthodes Lagrangiennes-Euleriennes . . . . .	9
2.1.4 Conclusion sur les méthodes de résolution en écoulement diphasique .	10
2.2 Ascension d'une bulle . . . . .	11
CHAPITRE 3 RÉOLUTION DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES . . . . .	16
3.1 Modélisation des écoulements diphasiques . . . . .	16
3.1.1 Équations de Navier-Stokes . . . . .	17
3.1.2 Interface fluide-fluide . . . . .	18
3.2 Méthodes numériques . . . . .	18
3.2.1 Méthode des éléments finis et formulation variationnelle . . . . .	19



3.2.2	Stabilisation SUPG-PSPG . . . . .	21
3.2.3	Intégration temporelle (Méthode BDF) . . . . .	22
3.2.4	Formulation ALE et maillage Pseudo-Solide . . . . .	24
3.2.5	Méthode des réactions . . . . .	25
3.2.6	Résolution de la matrice (méthode de Newton) . . . . .	26
3.3	Implémentation de la résolution de l'interface . . . . .	27
3.3.1	Interface Eulerienne-Lagrangienne . . . . .	27
3.3.2	Application des conditions d'interface . . . . .	29
3.3.3	Calcul de la courbure et de la tension superficielle . . . . .	31
CHAPITRE 4	VÉRIFICATION ET VALIDATION . . . . .	34
4.1	Vérification . . . . .	34
4.1.1	Calcul de la courbure . . . . .	34
4.1.2	Saut de pression . . . . .	37
4.2	Aspects théoriques . . . . .	38
4.2.1	Les harmoniques sphériques . . . . .	38
4.2.2	Modélisation du comportement d'une bulle . . . . .	43
4.3	Validation . . . . .	49
4.3.1	Oscillation de la bulle . . . . .	49
4.3.2	Ascension de la bulle . . . . .	56
CHAPITRE 5	APPLICATION : ÉTUDE DES BULLES ÉLLIPSOÏDALES . . . . .	67
5.1	Historique des observations . . . . .	67
5.2	Étude de bulles ellipsoïdales . . . . .	68
CHAPITRE 6	CONCLUSION . . . . .	72
6.1	Synthèse des travaux . . . . .	72
6.2	Limitations de la solution proposée . . . . .	73
6.3	Améliorations futures . . . . .	74
RÉFÉRENCES	. . . . .	75

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Nombres adimensionnels qui permettent de caractériser une bulle. $d_e$ est le diamètre équivalent à une sphère de même volume. . . . .	11
Tableau 4.1	Résultats du calcul de la courbure . . . . .	36
Tableau 4.2	Résultats du calcul du saut de pression induite par la tension de surface	37
Tableau 4.3	Expression analytique des premières harmoniques sphériques . . . . .	41
Tableau 4.4	Nombres adimensionnels caractérisant le problème d'oscillation de la bulle . . . . .	51
Tableau 4.5	Propriétés des fluides pour la cas de l'oscillation d'une bulle . . . . .	52
Tableau 4.6	Résultats de la simulation de l'oscillation de la bulle . . . . .	54
Tableau 4.7	Nombres adimensionnels caractérisant un problème d'ascension d'une bulle . . . . .	58
Tableau 4.8	Propriétés des simulation dimensionnels . . . . .	61
Tableau 4.9	Propriétés des simulations adimensionnels . . . . .	62

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Représentation de l'interface par une méthode VOF. a) Interface entre deux fluides située dans un domaine de maillage fixe. b) Représentation de l'interface par une fraction de volume d'un des fluides. . . . .	6
Figure 2.2	Représentation d'une interface par une fonction de distance $\varphi$ . (méthode LS) . . . . .	7
Figure 2.3	Cartographie des différents régimes d'une bulle tirée de Bhaga and Weber (1981). Légende : s, sphérique ; oe, ellipsoïde oblate ; oed, ellipsoïde oblate en disque ; oec, calotte ellipsoïdale oblate ; scc, calotte sphérique avec sillage fermé et stable ; sco, calotte sphérique avec sillage ouvert et instable ; sks, à jupe stable ; sks, à jupe instable. . . . .	12
Figure 2.4	Résultats expérimentaux de vitesse terminale en fonction du diamètre équivalent de la bulle tirée de Pelletier et al. (2015). ( $\triangle$ ) et ( $\circ$ ) sont les bulles lentes et rapides obtenues par Pelletier et al. (2015) respectivement. ( $\blacktriangle$ ) et ( $\bullet$ ) sont les bulles lentes et rapides obtenues par Peters and Christian (2012) respectivement. (- -) sont les courbes proposés dans Clift et al. (1978). . . . .	14
Figure 2.5	Schématisation de la bistabilité. (-) eau pure. (- -) eau contaminée. .	15
Figure 3.1	Exemple 2D d'un domaine diphasique. Les deux domaines fluides ( $\Omega_1$ et $\Omega_2$ ) sont séparés par l'interface ( $\Gamma_I$ ). . . . .	16
Figure 3.2	Élément de référence tétraèdre à 4 noeuds . . . . .	21
Figure 3.3	Exemple 2D d'un domaine diphasique séparé par une interface discrète. a) Domaine diphasique séparé par l'interface. b) Maillage du domaine. .	28
Figure 3.4	Élément d'interface . . . . .	28
Figure 3.5	Angles opposés à au segment $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_v$ . . . . .	32
Figure 4.1	Variation de la courbure moyenne de la sphéroïde $H_{spheroïde}$ en fonction de la latitude réduite $\beta$ . . . . .	35
Figure 4.2	Erreur et écart type sur le calcul de la courbure en fonction de la taille caractéristique des éléments . . . . .	36
Figure 4.3	Erreur et écart type sur le calcul du saut de pression en fonction de la taille caractéristique des éléments . . . . .	38
Figure 4.4	Système de coordonnées sphériques suivant la norme ISO . . . . .	39
Figure 4.5	Description géométrique de la bulle par un sphéroïde . . . . .	43
Figure 4.6	Approximation de la dérivée $\frac{\partial S_b}{\partial a}$ . . . . .	47

Figure 4.7	Géométrie du cas de validation portant sur l'oscillation de la bulle . .	50
Figure 4.8	Fonction de raffinement du maillage. Taille de maillage en fonction de la distance du centre de la bulle. . . . .	53
Figure 4.9	Portion du maillage de la bulle dans le plan XZ. a) Maillage grossier ( $l_c = r_e/8$ ). b) Maillage fin $l_c = r_e/16$ . . . . .	53
Figure 4.10	Amplitude de l'oscillation $\bar{a}$ en fonction du temps adimensionnel. (- -) représente la solution linéaire de Lamb (1945). (-) représente la solution non-linéaire. (x) sont les résultats du maillage grossier et (o) sont les résultats du maillage fin. . . . .	55
Figure 4.11	Amplitude d'oscillation d'une bulle. (- -) Sans la force de Meshchersky. (-) Avec la force de Meshchersky. . . . .	56
Figure 4.12	Erreur numérique relative sur le volume par rapport au volume initiale en fonction du temps adimensionnel. . . . .	56
Figure 4.13	Vue en plan ( $xz$ ) de la géométrie du cas de validation portant sur l'ascension de la bulle. . . . .	57
Figure 4.14	Vitesse de la bulle en fonction du temps pour 4 tailles caractéristiques différentes. . . . .	60
Figure 4.15	Convergence de l'erreur estimée sur la vitesse en fonction du maillage. . . . .	61
Figure 4.16	Comparaison des résultats : Coefficient de traînée $C_D$ en fonction du Eötvös. (o) Résultats dimensionnels. (x) Résultats adimensionnels. (- -) Relation (4.27) de Mei et al. (1994). (-·) Relation (4.29) de Moore (1965). (-) Relation (4.29) de Moore (1965) avec prédiction de $\chi$ de Legendre et al. (2012). . . . .	63
Figure 4.17	Comparaison des résultats : Déformation de la bulle $\chi$ en fonction de $We$ . (o) Résultats dimensionnels. (x) Résultats adimensionnels. (- -) Relation (4.33) de Moore (1963). (-·) Relation (4.34) de Moore (1965). (-) Relation (4.36) de Legendre et al. (2012). . . . .	64
Figure 4.18	Comparaison des résultats : Vitesse terminale d'une bulle d'air dans l'eau en fonction de son diamètre équivalent. (o) Résultats dimensionnels. (x) Résultats adimensionnels. (·) Mesures de Duineveld (1995). (- -) Relation (4.27) de Mei et al. (1994). (-·) Relation (4.29) de Moore (1965). (-) Relation (4.29) de Moore (1965) avec prédiction de $\chi$ de Legendre et al. (2012). . . . .	65

Figure 4.19	Comparaison avec le modèle : Vitesse adimensionnelle de la bulle en fonction du temps adimensionnel. (- -) Résultats de CADYF. (-.) Modèle combiné avec la relation (4.34) de Moore (1965). (-) Modèle combiné avec la relation (4.36) de Legendre et al. (2012). . . . .	66
Figure 5.1	Comparaison de la vitesse adimensionnelle de deux bulles de forme initiale différentes. (-) Bulle initialement prolate. (- -) Bulle initialement sphérique. . . . .	69
Figure 5.2	Comparaison des bulles prolate et sphérique sur les premiers instants.	69
Figure 5.3	Vitesse adimensionnel d'une bulle à $\mu^* = 100$ . . . . .	71

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET NOMENCLATURE

### Abréviations

3D	3 Dimensions
ALE	Arbitrary Lagrangian Eulerian
BDF	Backward Differentiation Formula
CADYF	Calcul et Analyse en DYnamique des Fluides
DNS	Direct Numerical Simulation
EDP	Équations aux Dérivées Partielles
FEM	Finite Element Method
GE	General Electric
GLS	Galerkin Least Square
LBB	Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi
LS	Level Set
MAC	Marker And Cell
MEF	Méthode des Éléments Finis
PSPG	Pressure Stabilized Petrov Galerkin
SPH	Smoothed Particule Hydrodynamics
SUPG	Streamline Upwind Petrov Galerkin
VOF	Volume Of Fluid

### Nomenclature

$a$	Demi-axe polaire
$A_e$	Aire projetée de la bulle
$b$	Demi-axe équatoriale
$C_C$	Coefficient de compression
$C_D$	Coefficient de traînée
$C_m$	Coefficient de masse ajoutée
$C_M$	Coefficient de Meshchersky
$d_e$	Diamètre équivalent
$\mathbf{f}$	Vecteur de forces, ou terme source $[f_x, f_y, f_z]$
$g$	Constante gravitationnelle
$H$	Courbure moyenne, $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$

$l_c$	Taille caractéristique du maillage
$N_i$	Liste des noeuds du maillage
$\hat{\mathbf{n}}$	Vecteur normale unitaire
$p$	Pression
$\Delta p$	Différence de pression à travers l'interface
$r$	Rayon
$r_e$	Rayon équivalent
$\mathbf{r}$	Coordonnées de références $[r, s, t]$
$S_b$	Surface de la bulle
$t$	Temps
$\hat{\mathbf{t}}$	Vecteur tangentiel unitaire
$\hat{\mathbf{t}}_1$	Premier vecteur tangentiel unitaire
$\hat{\mathbf{t}}_2$	Second vecteur tangentiel unitaire
$\mathbf{u}$	Vecteur de vitesse $[u, v, w]$
$\mathbf{u}_D$	Vecteur de vitesse de Dirichlet
$\mathbf{u}_n$	Vecteur de vitesse normale
$V$	Valence d'un noeud
$V_e$	Volume équivalent de la bulle
$\mathbf{v}$	Vecteur de vitesse ALE
$\mathbf{x}$	Coordonnées cartésiennes $[x, y, z]$
$\Gamma$	Frontière(s) au domaine
$\Gamma_D$	Frontière de Dirichlet
$\Gamma_I$	Frontière interface
$\Gamma_N$	Frontière de Neumann
$\gamma$	Tension superficielle
$\delta p$	Fonction test de pression
$\delta \mathbf{u}$	Fonctions tests de vitesse
$\zeta_n$	Taux d'amortissement du mode $n$
$\kappa_1$	Première courbure principale
$\kappa_2$	Seconde courbure principale
$\mu$	Viscosité dynamique
$\mu_1$	Viscosité dynamique du fluide 1
$\mu_2$	Viscosité dynamique du fluide 2
$\mu_c$	Viscosité dynamique dans la phase continue
$\mu_d$	Viscosité dynamique dans la phase dispersée
$\xi$	Coordonnées cartésiennes du maillage $[\xi, \eta, \zeta]$

$\rho$	Densité
$\rho_1$	Densité du fluide 1
$\rho_2$	Densité du fluide 2
$\rho_c$	Densité dans la phase continue
$\rho_d$	Densité dans la phase disperse
$\Delta\rho$	Différence de densité entre les deux fluides
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$\chi$	Ration d'aspect
$\omega_n$	Fréquence angulaire du mode $n$
$\Omega$	Domaine du problème
$\Omega_1$	Domaine du fluide 1
$\Omega_2$	Domaine du fluide 2

### Nombres Adimensionnels

$\bar{a}$	Demi-axe polaire adimensionnel, $\bar{a} = a/r_e$
$EO$	Nombre d'Eötvös, $EO = \Delta\rho g d_e^2 / \gamma$
$M$	Nombre de Morton, $M = g \mu_c^4 \Delta\rho / \rho_c^2 \gamma^3$
$Oh$	Nombre d'Onhesorge, $Oh = \gamma / \sqrt{\rho_c d_e}$
$Re$	Nombre Reynolds, $Re = \rho_c d_e \ \mathbf{u}\  / \mu_c$
$Re_a$	Nombre Reynolds selon $a$ , $Re_a = \rho_c d_e \dot{a} / \mu_c$
$Re_z$	Nombre Reynolds selon $z$ , $Re_z = \rho_c d_e \dot{z} / \mu_c$
$t^*$	Temps adimensionnel, $t^* = t \sqrt{\gamma / \rho_c \gamma d_e^3}$ ou $t^* = t \sqrt{g / d_e}$
$U^*$	Vitesse adimensionnelle, $U^* = \ \mathbf{u}\  / \sqrt{g d_e}$
$We$	Nombre de Weber, $We = \rho_c \ \mathbf{u}\  d_e / \gamma$
$\mu^*$	Viscosité adimensionnelle, $\mu^* = \mu_d / \mu_c$
$\rho^*$	Densité adimensionnelle, $\rho^* = \rho_d / \rho_c$



## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les écoulements diphasiques, ou *two-phase flow*, intéressent les ingénieurs depuis plusieurs années. Une compréhension adéquate des différentes mécaniques impliquées est un élément-clé à la conception et l’opération de plusieurs types de machines industrielles telles que les colonnes à bulles, les réacteurs nucléaires ou les turbines hydroélectriques. Les écoulements diphasiques ont fait l’objet de nombreuses études expérimentales et numériques. Malgré tout, les connaissances à ce sujet demeurent limitées. L’équipe du Prof. Stéphane Étienne, directeur de cette maîtrise, étudie activement les écoulements diphasiques afin de développer une meilleure compréhension des différents phénomènes observés pour la communauté scientifique et les ingénieurs appelés à faire face aux problématiques générées par ces écoulements.

### 1.1 Mise en contexte

Le projet s’insère dans les travaux de recherche de la Chaire General Electric (GE) en écoulements diphasiques dirigée par le Prof. Stéphane Étienne de l’école Polytechnique de Montréal. L’objectif principal de la Chaire de recherche est d’améliorer le savoir et la compréhension des écoulements diphasiques afin d’offrir à GE un éventail d’outils d’analyse et de conception pour la mise à jour de leurs installations hydroélectriques. En effet, dans certaines turbines, GE injecte de l’air au niveau des aubes afin de limiter les vibrations acoustiques et mécaniques de l’équipement. Ces vibrations sont d’autant plus présentes depuis que les turbines hydroélectriques sont amenées à fonctionner à bas régime pour stabiliser le réseau électrique suite à l’installation de sources intermittentes (p. ex. éolien et solaire). De plus, l’injection d’air permet d’oxygéner l’eau rejetée en aval des barrages — en certain climats, souvent pauvre en oxygène — et d’avoir un impact sur la biodiversité aquatique. Les turbines aérées, qui offrent une solution à ces deux problématiques, sont actuellement difficiles à caractériser vu la connaissance limitée des écoulements diphasiques auprès de la communauté scientifique. L’équipe du Prof. S. Étienne étudie les écoulements aérés dans des conditions similaires à celles des turbines hydroélectriques pour développer des corrélations nécessaires à la caractérisation des installations de GE.

Afin d’atteindre ses objectifs, la chaire de recherche prévoit plusieurs études autant expérimentales que numériques. De cette façon, les deux approches peuvent se soutenir et offrir un éventail plus large de données à exploiter. Par exemple, une étude expérimentale permet de valider un modèle numérique par confrontation des prédictions aux mesures obtenues. À l’inverse, une étude numérique peut expliquer certains phénomènes observés expérimentalement

puisqu'elle offre plus de détails au chercheur. Dans cette optique, l'équipe du Prof. S. Étienne désire développer son propre outil numérique d'analyse des écoulements diphasiques en 3D.

Cet outil a pour principal but de simuler avec précision les phénomènes physiques à petite échelle dans les écoulements aérés au voisinage d'une ou plusieurs bulles. On souhaite donc limiter les techniques de modélisation et utiliser une approche DNS (Direct Numerical Simulation). Notre point de départ est le logiciel d'éléments finis CADYF, du Prof. D. Pelletier de l'école Polytechnique de Montréal. Il permet de résoudre les équations de Navier-Stokes en 3D sur des maillages mobiles d'une manière totalement monolithique (système couplé). De plus, il utilise une méthode de résolution temporelle adaptative en temps et en ordre dans le but de limiter le temps de calcul tout en conservant une précision élevée.

**L'objectif principal** de cette maîtrise est alors d'implémenter, dans CADYF, la résolution des interfaces fluide-fluide dans l'optique d'effectuer des simulations d'écoulement de bulles en 3D. Cette implémentation doit assurer une précision maximale des résultats tout en conservant des temps de calcul raisonnables sur des ordinateurs de bureau.

Comme tout bon développement, il faudra, après l'implémentation, vérifier le code et valider les résultats à l'aide de cas de références. Ceci permet de s'assurer que l'implémentation est bien fonctionnelle en plus de tester la performance du code.

La Chaire prévoit utiliser le code pour effectuer plusieurs études comme celles du comportement de bulles proches de la paroi ou encore de l'impact du sillage de bulles rapprochées. L'application qui nous intéressera lors de cette maîtrise est la vitesse d'ascension de bulles d'air dans l'eau de diamètre compris entre 1.3mm et 6mm. Ce problème qui semblerait être un simple équilibre entre la force d'Archimède et la force de traînée est plus complexe qu'en apparence. En effet, dans ce régime particulier, on observe expérimentalement une dispersion des vitesses terminales d'ascension pour des bulles de volume équivalent. Le ratio des vitesses prédites pouvant atteindre des valeurs de 4. Cette dispersion est depuis longtemps attribuée à la contamination des fluides. C'est-à-dire qu'une bulle d'air rejetée dans de l'eau contaminée devrait monter lentement alors qu'une bulle dans de l'eau pure devrait monter rapidement. Cependant, certaines études expérimentales ont pu observer des bulles rapides dans de l'eau du robinet (donc vraisemblablement contaminée) et, à l'inverse, certaines études ont pu observer des bulles lentes dans de l'eau décontaminée. Basé sur leurs expériences, l'équipe de Prof. S. Étienne croit que l'on devrait plutôt attribuer cette observation à phénomène de bistabilité. La vitesse terminale de la bulle serait alors plutôt dictée par ses conditions initiales. On désire donc utiliser l'outil numérique développé dans le cadre de cette maîtrise pour étudier ce phénomène. Une explication plus approfondie de ce problème et des causes possibles de bistabilité seront présentées au chapitre suivant.

## 1.2 Sommaire des objectifs

### Objectif principal

Implémenter, dans le logiciel CADYF, la résolution des interfaces fluide-fluide pour la simulation d'écoulements de bulles en 3D.

### Objectifs spécifiques

- Développer une méthode de résolution des interfaces fluide-fluide par éléments finis pour l'implémenter dans CADYF.
- Vérifier et valider la méthode de résolution à l'aide de cas tests se rapprochant des conditions de simulation finale.
- Appliquer la méthode de résolution à la montée d'une bulle en régime ellipsoïdal afin d'étudier la problématique de la bistabilité.

## 1.3 Note sur les écoulements de bulles

Les écoulements aérés par des bulles font partie d'une famille d'écoulement diphasique nommé : écoulement à phase dispersée. C'est-à-dire que les bulles (la phase dispersée) sont introduites et distribuées à l'intérieur d'un fluide environnant (la phase continue). C'est pourquoi, dans ce mémoire, on notera  $d$  la phase associée à la bulle et  $c$  la phase environnante.

## 1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire n'est pas une revue de littérature ou introduction des méthodes numériques en écoulement diphasique. Le but premier est de présenter les travaux effectués dans le cadre de cette maîtrise. C'est pourquoi, sans être simpliste, on tentera de conserver les aspects théoriques le plus simples possible. Pour les lecteurs plus curieux, on offrira les références nécessaires à un apprentissage plus approfondi.

Tout d'abord, on présente, au chapitre 2, un état de l'art des connaissances en rapport aux sujets clés de ce projet. Le chapitre 3 propose un résumé des équations mathématiques au coeur des problèmes diphasiques ainsi que leur méthodes de résolution numériques. C'est aussi là que sera présentée la méthode de résolution des interfaces fluide-fluide implémentée. Le chapitre 4 se consacre aux cas de vérification et validation de l'outil développé. Au chapitre 5 on appliquera notre outil à l'écoulement autour de bulles ellipsoïdales. Finalement, le chapitre 6 conclura ce mémoire avec un rappel des travaux effectués, de leurs limitations ainsi que quelques recommandations pour les travaux futurs.

## CHAPITRE 2 ÉTAT DE L'ART

Ce chapitre dresse un portrait des connaissances scientifiques requises. Tous d'abord, on présentera un résumé des méthodes numériques en écoulements diphasiques par résolution directe des équations de Navier-Stokes. On ne traitera donc pas des méthodes moyennées, utilisées pour des problèmes de plus grande échelle. Ensuite, on verra un historique des études portant sur l'ascension d'une bulle.

### 2.1 Méthodes numériques en écoulements diphasiques

Il existe aujourd'hui plusieurs méthodes de résolution des écoulements diphasiques par résolution directe (DNS). Chacune d'entre elles propose ces propres avantages et inconvénients. On distingue 2 grandes classes : l'approche Eulerienne et l'approche Lagrangienne. La principale différence réside dans le type de référentiel utilisé. Les méthodes Euleriennes sont appliquées dans un référentiel fixe tandis que les méthodes Lagrangiennes sont appliquées dans référentiel mobile qui suit l'écoulement (les particules fluides). Finalement, on retrouve une approche hybride qui se nomme ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*).

Dans les sections suivantes, on verra les différentes approches de résolution des écoulements diphasiques. On portera une attention particulière aux méthodes ALE, puisqu'il s'agira de l'approche utilisée dans ce projet. On verra également quelques méthodes parmi les plus connues pour chacune des catégories.

#### 2.1.1 Méthodes Euleriennes

Les méthodes Euleriennes utilisent un maillage fixe pour la solution de l'écoulement. L'interface se déplacera alors librement dans le maillage lors de la résolution. Les différentes méthodes se distinguent principalement par leur manière de représenter l'interface et d'appliquer les conditions frontières. Pour la représentation de l'interface, on retrouve deux familles de méthodes : les méthodes à capture d'interface et les méthodes à suivi d'interface.

#### Méthodes à capture d'interface

Dans les méthodes à capture d'interface (*Front-Capturing*) l'interface n'est pas décrite explicitement. On utilise plutôt une fonction indicatrice qui est advectée dans le domaine fixe. La position exacte de l'interface n'est pas connue ce qui rend ardu les calculs géométriques. De plus, l'application des changements de propriétés s'applique sur l'épaisseur d'un élément du

maillage ce qui génère une diffusion importante dans la solution. Les méthodes de capture d'interface sont reconnues pour leurs capacités à gérer les changements de topologies tels que la rupture et la coalescence de bulles. C'est probablement pourquoi ce type de méthode est plus souvent utilisé, en particulier dans les logiciels de CFD commerciaux. Il existe plusieurs méthodes à capture d'interface, qui se différencient généralement par leur fonction indicatrice. Parmi les plus connues, on retrouve la méthode VOF (*Volume of Fluid*) et LS (*Level-Set*).

### ***Volume Of Fluid***

La méthode VOF a été introduite par Noh and Woodward (1976) et popularisée par Hirt and Nichols (1981). Il s'agit probablement de la méthode la plus populaire auprès des logiciels de volumes finis. Elle consiste à utiliser une fonction indicatrice  $C$  variant de 0 à 1 qui représente la fraction volumique d'une phase dans chaque cellule du domaine (voir figure 2.1). La fonction  $C$  est advectée à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0 \quad (2.1)$$

Les deux domaines sont alors représentés par un seul fluide dont les propriétés sont calculées en fonction de  $C$  :

Densité :

$$\rho = \rho_1 C + \rho_2 (1 - C) \quad (2.2)$$

Viscosité :

$$\mu = [C\rho_1\mu_1 + (1 - C)\rho_2\mu_2] / \rho \quad (2.3)$$

Les enjeux principaux de la méthode VOF se retrouvent dans le schéma de résolution de l'équation (2.1) et dans la reconstruction de la géométrie de l'interface. Pour ce faire, il existe différentes méthodes (p. ex. SILC (Noh and Woodward, 1976) ; SOLA-VOF (Hirt and Nichols, 1981) ; PILC (Youngs, 1982)). Une comparaison des différents schémas modernes a été effectuée par Gopala and van Wachem (2008).

La plupart des schémas actuels de la méthode VOF assurent une excellente conservation de la masse. Cependant, le calcul des mesures géométriques tel que la normale et la courbure ne sont toujours pas satisfaisants.

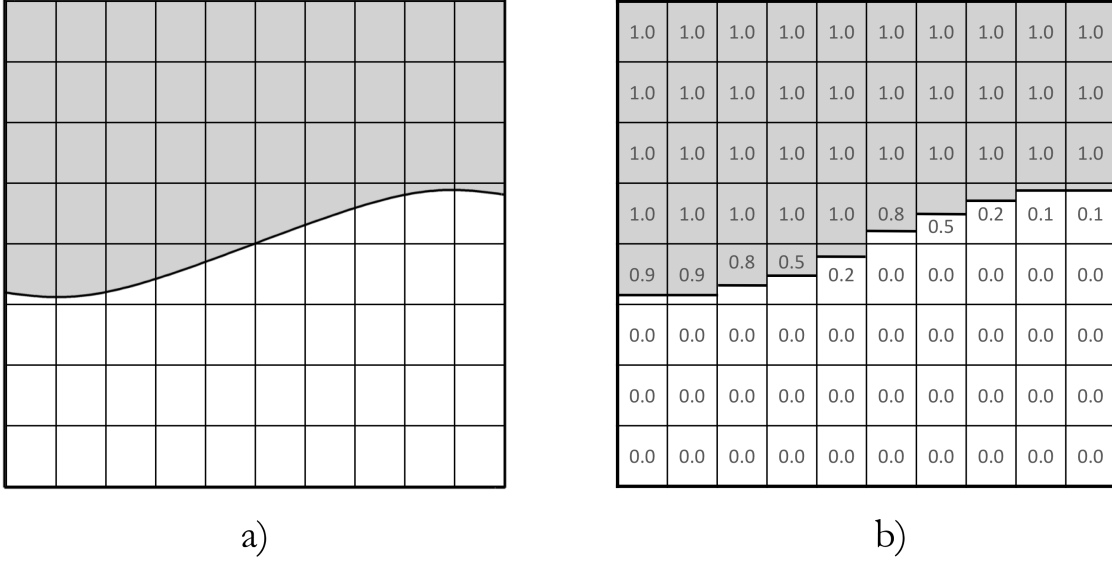


Figure 2.1 Représentation de l'interface par une méthode VOF. a) Interface entre deux fluides située dans un domaine de maillage fixe. b) Représentation de l'interface par une fraction de volume d'un des fluides.

### Level-Set

La méthode *Level-Set* a été développée par Osher and Sethian (1988) et adaptée aux éléments finis par Quecedo and Pastor (2001). Cette fois, on introduit une fonction  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  qui représente la phase associée à un point  $\mathbf{x}$  par son signe (c.-à-d.  $\varphi(\mathbf{x}, t) > 1$  dans le fluide 1 et  $\varphi(\mathbf{x}, t) < 1$  dans le fluide 2). L'interface est donc représentée par l'isovaleur  $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$  (voir figure 2.2). Typiquement, on initialise cette fonction comme étant la distance signée d'un point  $\mathbf{x}$  par rapport à l'interface. De manière semblable à la méthode VOF, la fonction  $\varphi$  est advectée par la relation :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (2.4)$$

En pratique, la vitesse  $\mathbf{u}$  peut être n'importe quels champs de vitesse (p.ex. champ de vitesse de la solution). Cependant, on déplace seulement l'interface dans la direction normale. À l'interface, la relation (2.4) s'écrit donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u}_n |\nabla \varphi| = 0 \quad \text{si } \varphi = 0 \quad (2.5)$$

avec  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$ , la vitesse normale à l'interface.

Les propriétés du fluide sont calculées comme suit :

Densité :

$$\rho = \rho_1 + H(\varphi)(\rho_2 - \rho_1) \quad (2.6)$$

Viscosité :

$$\mu = \mu_1 + H(\varphi)(\mu_2 - \mu_1) \quad (2.7)$$

où  $H(\varphi)$  est la fonction Heaviside qui, typiquement, vaut 0 si  $\varphi < 0$  et 1 si  $\varphi \geq 0$ . Numériquement, l'utilisation d'une fonction raide tel que la fonction de Heaviside induit des oscillations indésirables qui entraînent une mauvaise description du fluide près de l'interface. C'est pourquoi on utilise plutôt une fonction lissée tel que :

$$\begin{cases} H(\varphi) = 0 & \text{si } \varphi < -\delta_i \\ H(\varphi) = 1 & \text{si } \varphi > \delta_i \\ H(\varphi) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\varphi}{\delta_i} + \frac{1}{\pi} \sin \left( \frac{\pi \varphi}{\delta_i} \right) \right] & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

avec  $\delta_i$ , l'épaisseur fictive de l'interface.

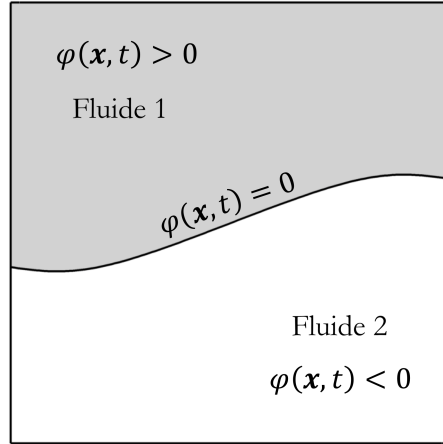


Figure 2.2 Représentation d'une interface par une fonction de distance  $\varphi$ . (méthode LS)

La fonction de distance  $\varphi$  peut être utilisée pour calculer des mesures géométriques tel que la normale et la courbure de l'interface. Cela facilite, entre autres, l'application de la tension de surface.

Contrairement à la méthode VOF, la méthode *Level-Set* ne garantit pas la conservation du volume. On observe en effet des pertes de masse lorsque l'interface subit des déformations importantes et que la fonction  $\varphi$  devient trop plate ou trop raide (Rider and Kothe, 1995).

## Méthodes à suivi d'interface

Les méthodes de suivi d'interface (*Front-tracking*) représentent plutôt l'interface à l'aide d'éléments géométriques d'épaisseur nulle. On parle alors d'une description Lagrangienne de l'interface. L'avantage principal de cette approche est la connaissance de la position exacte de l'interface permettant de calculer les mesures géométriques comme la courbure et la normale. Les méthodes à suivi d'interface sont donc généralement plus précises lors de l'application de la tension superficielle et des autres conditions d'interface. Cependant, ces méthodes peuvent devenir très complexes à gérer lorsque les déplacements sont importants ou lorsque l'on retrouve des changements de topologie. Parmi les méthodes à suivi d'interface, on verra les méthodes *Front-Tracking* et *Volume-Tracking*.

### ***Front-Tracking***

La méthode *Front-Tracking* a été développée par Unverdi and Tryggvason (1992). Ici, on représente l'interface par sa propre discrétisation spatiale. Dans le cas tridimensionnel, on utilisera généralement des éléments triangulaires. L'interface se déplace librement dans le maillage fixe du problème général suivant le champ de vitesse. À l'inverse, les forces interfaciales sont calculées directement aux nœuds de l'interface et sont transférées dans les équations de Navier-Stokes sous forme de terme source.

L'interface permet aussi de délimiter les propriétés des fluides. Contrairement aux méthodes à capture d'interface, les propriétés ne sont pas advectées avec l'interface, il est donc nécessaire d'en faire la mise à jour à chaque pas de temps. En pratique, on ne fait qu'imposer les bonnes propriétés sachant qu'on est d'un côté ou de l'autre de l'interface.

Jusqu'ici, l'utilisation d'une description Lagrangienne de l'interface telle que la méthode de *Front-Tracking* est relativement simple. La difficulté provient de la gestion du maillage suite à de grandes déformations. Il devient alors nécessaire de déplacer les nœuds le long de l'interface de manière à conserver un maillage uniforme. De plus, les changements topologiques ne s'effectuent pas automatiquement comme dans les méthodes VOF et Level-Set.

Pour remédier à ces deux derniers problèmes, certains ont développés des méthodes sans connectivité, où l'interface n'est représentée que par des nœuds (p.ex. Méthode Point-Set de Torres and Brackbill (2000))

### ***Volume-Tracking (MAC)***

*Volume-Tracking*, ou MAC (*Marker And Cell*), est une vieille méthode introduite par Harlow and Welch (1965) qui inspira par la suite la méthode VOF. Dans la méthode MAC, un des fluides est représenté par un ensemble de particules virtuelles de masse nulle initialement



réparties de manière uniforme dans le domaine. Les marqueurs sont ensuite déplacés par le champ de vitesse de la solution. L'interface est déterminée par l'interpolation entre les particules extérieures du volume étudié. Une interpolation d'ordre 2 est suffisante au calcul de la courbure.

La méthode MAC est encore aujourd'hui utilisée pour ses performances intéressantes. Une revue des derniers développements a été effectué par McKee et al. (2008).

### 2.1.2 Méthodes Lagrangiennes

Ces méthodes de résolution des écoulements diphasiques sont simples. En effet, on se base sur une formulation Lagrangienne complète du problème de Navier-Stokes. Le maillage suit alors le mouvement de fluide ce qui permet de connaître la position de l'interface à chaque instant.

Les méthodes complètement Lagrangiennes sont reconnues pour leur précision dans l'analyse des écoulements diphasiques. Cependant, des distorsions dans le maillage apparaissent rapidement suite au mouvement du fluide. C'est pourquoi il est souvent nécessaire de les coupler avec des algorithmes de remaillage automatique parfois coûteux (p.ex. Muttin et al. (1993)).

### 2.1.3 Méthodes Lagrangiennes-Euleriennes

Les méthodes Lagrangiennes-Euleriennes, ou ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*), bénéficient de la précision des méthodes Lagrangiennes en plus d'offrir une mobilité supplémentaire au maillage de la solution. Elle a été adaptée à la méthode des éléments finis par Hughes et al. (1981). Le principe est de résoudre de manière semblable les équations de Navier-Stokes, mais cette fois, avec un maillage où les nœuds peuvent se déplacer librement. Pour ce faire, on doit réécrire une formulation des équations qui tient compte de la vitesse de déplacement du maillage. On verra une présentation de ce développement à la section 3.2.4.

Le choix de la méthode utilisée pour déplacer le maillage est libre à l'utilisateur. Dans les cas extrêmes, on peut imposer une vitesse nulle, qui donnerait une formulation Eulerienne, ou une vitesse égale à celle du fluide, qui donnerait une formulation Lagrangienne. Cependant, l'intérêt est plutôt de choisir une méthode permettant de déplacer le maillage de manière à le conserver le plus régulier possible, et ce, peu importe la déformation du domaine. C'est en effet la méthode de déplacement du maillage qui joue le plus grand rôle dans le succès de l'approche ALE.

Dans l'approche ALE, l'interface est représentée de manière Lagrangienne. Sa position est donc connue à chaque instant, de même que sa vitesse. Connaissant alors l'ensemble des

vitesse aux frontières du domaine, on peut utiliser différentes techniques pour propager la vitesse du maillage à l'intérieur du domaine. Par exemple :

- Méthodes transfinies ; voir Yamada and Kikuchi (1993) ou Gadala and Wang (1999)
- Lissage Laplacien ; voir Löhner and Yang (1996)
- Interpolation simple des vitesses.

Il existe beaucoup d'autres méthodes de régularisation du maillage comme la méthode du pseudo-solide de Sackinger et al. (1996) qui est utilisée dans ce projet et qui sera présentée à la section 3.2.4.

La formulation ALE est aussi utilisée dans le cadre de l'adaptation de maillage. Traditionnellement, les méthodes d'adaptation de maillage demandent d'arrêter le calcul, de régénérer un maillage et d'interpoler la solution précédente au nouveau maillage. Ici, on ne génère pas de nouveau maillage, le nombre d'éléments reste le même. Les éléments migrent automatiquement vers les endroits où les gradients de la solution sont importants ou vers l'endroit dont l'erreur estimée est élevée. On évite donc les coûts reliés à l'arrêt de la simulation. Dans ce projet, cette dernière méthode ne sera pas utilisée.

Pour une introduction compréhensible et plus complète de la méthode ALE, la lecture du chapitre *Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods* tiré du livre *Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 1* écrit par Donea et al. (2004) est recommandée.

## 2.1.4 Conclusion sur les méthodes de résolution en écoulement diphasique

Nous avons couvert les méthodes les plus populaires parmi les approches Eulerienne, Lagrangienne et Lagrangienne-Eulerienne. Bien sûr, il existe plusieurs autres méthodes qui n'ont pas été couvertes. Par exemple, certains utilisent des méthodes hybrides tel que CLSVOF (*Coupled Level-Set/Volume Of Fluid*) proposée par Sussman and Puckett (2000). Un tout autre groupe de méthodes sans maillage est aussi disponible (p. ex. méthode SPH de Monaghan (1994)).

Il est important de noter que cette catégorisation des méthodes est basée sur le type de référentiel utilisé et non sur la description de l'interface. En effet, nous avons vu que dans l'approche Eulerienne il y a deux types de description de l'interface : la capture d'interface et le suivi d'interface. Or, on s'y réfère souvent comme des méthodes Euleriennes et Lagrangiennes respectivement. Cela peut facilement porter à confusion. En effet, on dit souvent que la méthode *Front-Tracking* est une méthode Lagrangienne alors qu'il s'agit plutôt d'une méthode Eulerienne avec une description Lagrangienne de l'interface.

La méthode utilisée dans ce projet est de type Lagrangienne-Eulerienne. De cette façon, on

assure une précision maximale sur la résolution de l'interface. De plus, on prévoit des déformations limitées de l'interface. Aucun remaillage ne sera nécessaire. À notre connaissance, très peu d'auteurs utilisent ce type de méthode. Le développement de Anjos et al. (2014) est probablement celui qui se rapproche le plus du développement présenté dans ce mémoire.

## 2.2 Ascension d'une bulle

Le mouvement des bulles induit par une différence de densité (Buoyancy) est un phénomène diphasique typique. On le retrouve dans plusieurs applications d'ingénierie et dans des phénomènes naturels. Malgré son ubiquité, sa compréhension est limitée puisqu'il s'agit d'un problème très complexe sensible à plusieurs facteurs. En effet, les premiers travaux expérimentaux ont rapidement exposés des comportements inexpliqués. Ces ouvrages ont fait l'objet d'une première revue de littérature par Clift et al. (1978). C'est alors que l'on a commencé à diviser les bulles en 3 types : bulles sphériques, bulles ellipsoïdales et bulles à calotte sphérique. On attribue une bulle à ceux-ci à l'aide de 3 nombres adimensionnels : Eötvös ( $Eo$ ), Morton ( $M$ ) et Reynolds ( $Re$ ). Ces nombres sont définis au tableau 2.1. Pour chacun de ces régimes, on retrouve des comportements et des corrélations propres. Dans le but de mieux comprendre les divers mécanismes impliqués, plusieurs études expérimentales ont continué à voir le jour. On peut penser, par exemple, aux importants travaux de Bhaga and Weber (1981) qui ont, entre autres, permis d'enrichir la catégorisation du problème qui comporte maintenant 9 régimes présentés à la figure 2.3.

Tableau 2.1 Nombres adimensionnels qui permettent de caractériser une bulle.  $d_e$  est le diamètre équivalent à une sphère de même volume.

$Eo$	$M$	$Re$
$\frac{\Delta\rho g d_e^2}{\gamma}$	$\frac{g \mu_c^2 \Delta\rho}{\rho_c^2 \gamma^3}$	$\frac{\rho_c d_e \ \mathbf{u}\ }{\mu_c}$

Par la suite, des méthodes numériques de plus en plus efficaces ont été développées permettant d'offrir davantage d'informations que les montages expérimentaux. En conséquence, des modèles plus complets sont apparus accompagnés d'une validation rigoureuse. Une seconde revue de littérature a été effectuée par Magnaudet and Eames (2000). Cette revue présentait les principales corrélations de traînée encore utilisées aujourd'hui (p.ex. Mei et al. (1994) et Moore (1965)).

Parmi les problématiques qui ont été observées suite aux nombreuses études expérimentales, une attire particulièrement notre attention. Il s'agit de la dispersion de la vitesse d'ascension

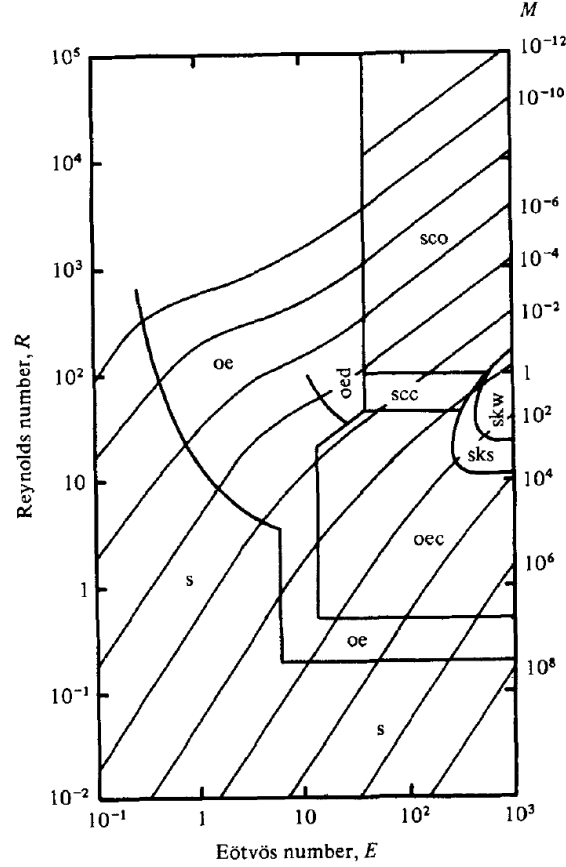


Figure 2.3 Cartographie des différents régimes d'une bulle tirée de Bhaga and Weber (1981). Légende : s, sphérique ; oe, ellipsoïde oblate ; oed, ellipsoïde oblate en disque ; oec, calotte ellipsoïdale oblate ; scc, calotte sphérique avec sillage fermé et stable ; sco, calotte sphérique avec sillage ouvert et instable ; sks, à jupe stable ; skw, à jupe instable.

des bulles en régime ellipsoïdal. En effet, on a remarqué suite aux travaux de Clift et al. (1978), deux courbes différentes pour prédire la vitesse terminale d'ascension d'une bulle en fonction de son diamètre. Le ratio des vitesses pouvant parfois atteindre des valeurs de 4. Clift et al. (1978) a trouvé une certaine corrélation entre le type d'eau utilisé et la vitesse de montée. C'est-à-dire que si un montage expérimental avait été assemblé en prenant soin de préalablement décontaminer l'eau, les chances d'obtenir des bulles qui suivent la courbe rapide étaient accrues. À l'inverse, si aucune mention sur la qualité de l'eau n'était faite — et qu'il s'agissait probablement d'eau provenant d'un robinet — il était alors présumable d'observer des bulles suivant la courbe lente.

La contamination fût alors identifiée comme étant la principale cause de ralentissement de la bulle ou, peut-être même, la seule. Son effet a fait l'objet d'une revue de littérature par Takagi and Matsumoto (2011). L'idée est la suivante : les surfactants, présents dans l'eau

contaminée, s'attachent à la surface de la bulle dès son injection dans le montage expérimental. L'écoulement qui se développe autour de la bulle fait en sorte que les surfactants migrent vers la partie inférieure, générant un gradient de tension de surface, et donc, un effet Marangoni. Ce dernier est la cause d'un contre courant qui ralentit la bulle. Certains auteurs ont même modélisé numériquement cet effet directement (Lakshmanan and Ehrhard, 2010) ou via un modèle de calotte stagnante (Fdhila and Duineveld, 1996) montrant des comparaisons satisfaisantes avec les résultats expérimentaux.

C'est au début des années 2000 que Tomiyama et al. (2002) et Wu and Gharib (2002) proposèrent une corrélation entre la forme initiale de la bulle et sa vitesse terminale. Dans les deux cas, les expériences exécutées dans de l'eau pure ont montré des bulles lentes et rapides. Un fort lien entre la vitesse terminale et la forme initiale de la bulle a été soulevé. Si les déformations initiales étaient faibles, les bulles montaient lentement avec une forme sphérique tandis que les bulles initialement déformées montaient rapidement avec une forme ellipsoïdale. Yang et al. (2003) ont tenté, sans succès, de reproduire ces résultats à l'aide d'un modèle numérique axisymétrique, laissant supposer que le problème était alors tridimensionnel. Plus tard, Peters and Christian (2012) et Pelletier et al. (2015) observèrent aussi des bulles lentes et rapides, mais cette fois, dans de l'eau du robinet (voir figure 2.4). On peut donc supposer que l'eau était suffisamment contaminée pour ralentir les bulles. Les conclusions de Peters and Christian (2012) suivent les précédentes. En effet, ils remarquèrent que lorsque l'interface initiale était mobile la bulle montait rapidement et que lorsque l'interface initiale était immobile la bulle montait lentement.

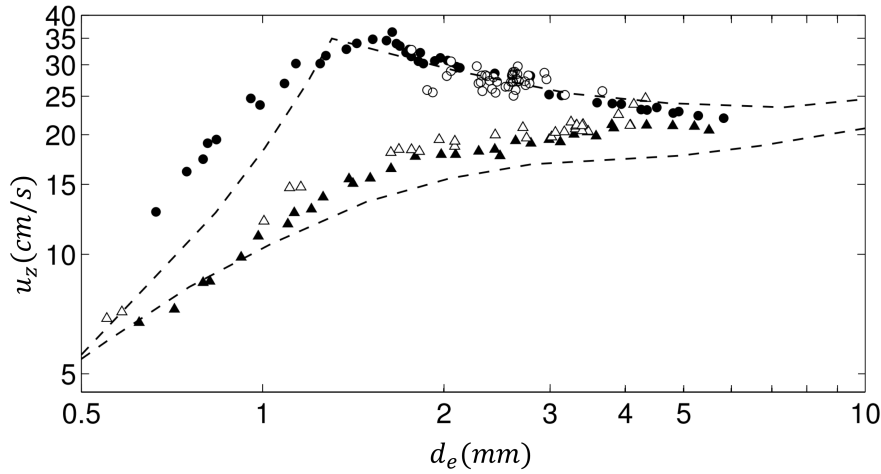


Figure 2.4 Résultats expérimentaux de vitesse terminale en fonction du diamètre équivalent de la bulle tirée de Pelletier et al. (2015). ( $\triangle$ ) et ( $\circ$ ) sont les bulles lentes et rapides obtenues par Pelletier et al. (2015) respectivement. ( $\blacktriangle$ ) et ( $\bullet$ ) sont les bulles lentes et rapides obtenues par Peters and Christian (2012) respectivement. (- -) sont les courbes proposés dans Clift et al. (1978).

Suite à ces dernières observations, l'équipe du Prof. S. Étienne a alors supposé que le comportement observé en laboratoire pourrait être dû à un phénomène de bistabilité séparant les deux types de bulle (rapide et lente). La contamination jouerait donc un rôle sur les états de stabilité plutôt que d'être la seule cause de production de bulles lentes (voir figure 2.5). Une façon de vérifier cette théorie est d'effectuer des simulations tridimensionnelles d'ascension

de bulle grâce à un modèle numérique de haute précision et d'observer le comportement des bulles en régime lent. De cette manière, on s'assure que le système est exempt de toute forme de contamination. C'est ce que nous tenterons d'effectuer au chapitre 5.

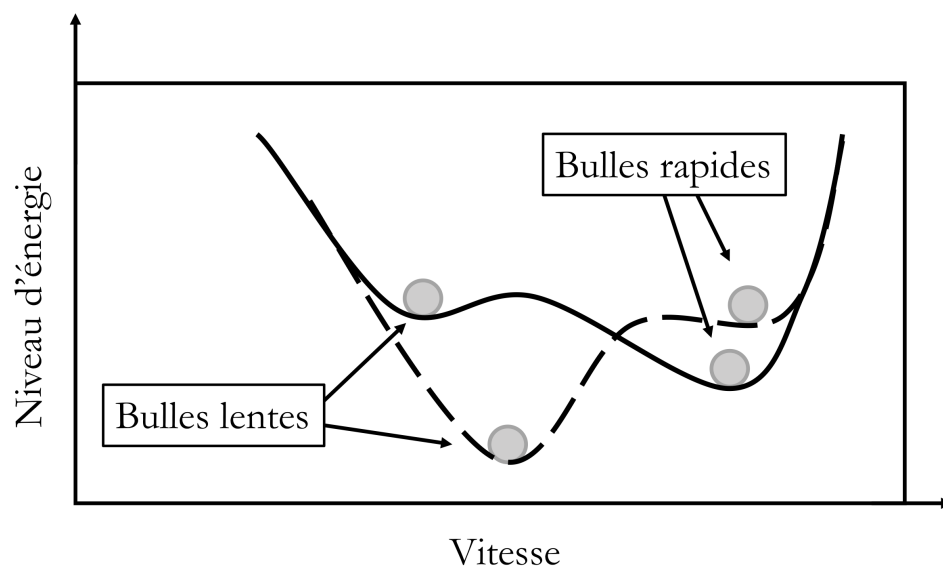


Figure 2.5 Schématisation de la bistabilité. (—) eau pure. (---) eau contaminée.

## CHAPITRE 3 RÉSOLUTION DES ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES

Ce chapitre présente la formulation des équations permettant de résoudre un écoulement à phases séparées. On commence par passer en revue les équations aux dérivées partielles qui régissent les problèmes d'écoulement diphasiques. On abordera ensuite les méthodes numériques qu'on utilisera pour résoudre ces EDP. Finalement, on accorde une attention particulière au traitement des conditions d'interface entre 2 fluides.

### 3.1 Modélisation des écoulements diphasiques

Un écoulement diphasique fait intervenir deux fluides de phases différentes (gaz/liquide). Or, on peut aussi étudier des écoulements constitués de fluides de même phase (liquide/liquide) ou encore d'un seul fluide présent sous forme de deux phases (liquide/vapeur). Dans tous les cas, on fait face à un problème composé de plusieurs domaines (au moins 2) séparés par des interfaces. Une solution à l'écoulement des fluides est donnée par les équations de Navier-Stokes tandis que l'interface entre les deux domaines fluides constitue un type particulier de frontière à laquelle on appliquera des conditions d'interface.

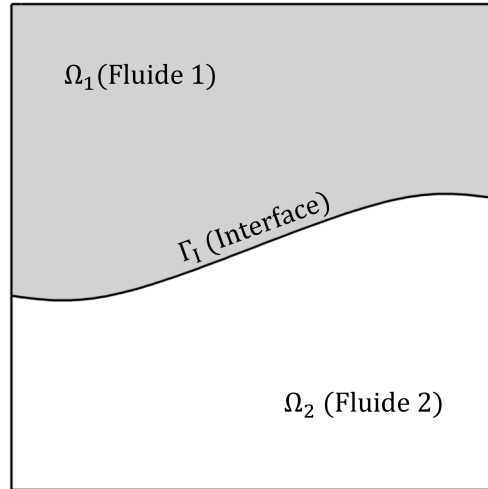


Figure 3.1 Exemple 2D d'un domaine diphasique. Les deux domaines fluides ( $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ) sont séparés par l'interface ( $\Gamma_I$ ).



### 3.1.1 Équations de Navier-Stokes

Considérons un fluide newtonien incompressible. L'écoulement est alors décrit à l'aide des équations suivantes :

Continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

Mouvement :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \rho \mathbf{f} \quad (3.2)$$

Les équations aux dérivées partielles (3.1) et (3.2) sont appelées équations de Navier-Stokes. Pour simplifier l'écriture, on introduit le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. L'équation (3.2) s'écrit maintenant :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (3.4)$$

Les équations de Navier-Stokes s'appliquent sur un domaine  $\Omega$  délimité par une ou plusieurs frontière(s)  $\Gamma$ . Pour poser le problème correctement, on doit spécifier des conditions limites sur ces frontières :

Condition de Dirichlet :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \quad (3.5)$$

Condition de Neuman :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{T} \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{u}_D$  est la vitesse imposée,  $\mathbf{T}$  la traction imposée et  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale unitaire à la frontière dans la direction extérieure au domaine. Il est important que les frontières respectent les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\Gamma_N \cup \Gamma_D &= \Gamma \\ \Gamma_N \cap \Gamma_D &= \emptyset\end{aligned}\tag{3.7}$$

### 3.1.2 Interface fluide-fluide

L'interface entre deux fluides immiscibles peut être vue comme un type particulier de frontière  $\Gamma_I$  qui sépare les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (voir figure 3.1). Des conditions limites spéciales sont nécessaires pour garantir que la physique du problème demeure consistante avec la théorie des écoulements diphasiques. Les conditions d'interface sont les suivantes :

Continuité des vitesses :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_I \tag{3.8}$$

Continuité des contraintes tangentielles :

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad \text{sur} \quad \Gamma_I \tag{3.9}$$

Saut de contraintes normales dû à la tension superficielle :

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} + \gamma \hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_I \tag{3.10}$$

où les indices 1 et 2 désignent les fluides 1 et 2 respectivement,  $\hat{\mathbf{t}}$  est la tangente unitaire à l'interface et  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale unitaire à l'interface. On note aussi  $\gamma$  qui représente la tension superficielle entre les deux fluides et  $\hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})$  qui est la courbure normale à l'interface. Le calcul de ces termes sera présenté à la section 3.3.3

## 3.2 Méthodes numériques

Tout comme plusieurs autres EDP, les équations de Navier-Stokes posent un réel défi aux mathématiciens. À ce jour, il n'existe toujours pas de solution générale à ces équations. Malgré cela, on les résout avec confiance depuis plusieurs années grâce à des méthodes numériques telles que les éléments finis ou les volumes finis. Dans ce projet, on utilisera les éléments finis. Cette méthode permet de représenter des géométries complexes et d'appliquer les conditions aux frontières de manière consistante. En plus de la MEF de base, d'autres méthodes s'ajoutent afin d'étendre l'outil à des problèmes plus complexes. Les sections suivantes

présentent l'ensemble de ces méthodes.

### 3.2.1 Méthode des éléments finis et formulation variationnelle

Plusieurs bons ouvrages présentent la méthode des éléments finis (p. ex. Reddy (1993)). Dans cette section, on se limitera à résumer les étapes importantes dans le cas des équations de Navier-Stokes.

La méthode des éléments finis repose sur les principes de formulation variationnelle. La première étape consiste donc à développer la forme faible des équations (3.1) et (3.4). On multiplie alors les équations provenant du problème fort par une fonction test puis on intègre sur le domaine  $\Omega$ . Suite à l'intégration par parties des termes de diffusion et de pression, on obtiendra la forme faible suivante :

Continuité :

$$\int_{\Omega} \delta p (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

Mouvement :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{n}}) \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.12)$$

où  $\delta p$  et  $\delta \mathbf{u}$  sont les fonctions tests de la pression et de la vitesse respectivement. Le terme de bord sur  $\Gamma_N$  résulte de l'application du théorème de la divergence.

La forme faible du problème n'est valide que si les fonctions tests  $\delta p$  et  $\delta \mathbf{u}$  appartiennent au même espace fonctionnel que la forme forte. C'est à dire que :

$$\begin{aligned} \delta p &\in L_{\Omega}^2 \\ \delta \mathbf{u} &\in H_{\Omega}^1 | \delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $L_{\Omega}^2$  est l'espace des fonctions de carré intégrable et  $H_{\Omega}^1$  est l'espace de Sobolev. Une fois que nous avons une formulation faible consistante pour le problème général de Navier-Stokes, on peut discrétiser le domaine  $\Omega$  en éléments de géométrie simple  $\Omega^e$  et les inconnues  $\mathbf{u}$  et  $p$  en approximations polynomiales  $\mathbf{u}_h$  et  $p_h$  telles que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h &= \sum_{i=1}^{n_u} N_i^u \mathbf{u}_i \\
p \approx p_h &= \sum_{i=1}^{n_p} N_i^p p_i
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où  $N_i^u$  et  $N_i^p$  sont les fonctions d'interpolation des éléments et  $\mathbf{u}_i$  et  $p_i$  sont les valeurs nodales. Le nombre et le degré des fonctions dépendent du type d'élément choisi, et donc, du nombre de noeuds ( $n_u$  et  $n_p$ ) disponibles pour chaque variable. Les équations (3.11) et (3.12) mènent alors à un système d'équations de taille  $3n_u + n_p$  par élément. Dans notre cas, on utilisera des tétraèdres à 4 noeuds de vitesse et de pression (c.-à-d. P1-P1). Ces éléments ont donc 4 fonctions d'interpolation pour chacune des variables de vitesse et 4 fonctions d'interpolation pour la pression. Ces fonctions sont de degré 1. Typiquement, on choisira des fonctions tests identiques aux fonctions d'interpolation de l'élément. On obtient alors de la méthode de Galerkin.

La discrétisation d'un domaine quelconque résulte en des éléments de forme et de taille très variées. La construction de fonctions d'interpolation dans le domaine physique  $\mathbf{x} = [x, y, z]$  est donc difficile à automatiser. C'est pourquoi on utilise un élément de référence (voir figure 3.2). Il s'agit d'un élément de géométrie fixe auquel les calculs peuvent être ramenés à l'aide d'une simple transformation à partir des coordonnées physiques  $\mathbf{x} = [x, y, z]$  aux coordonnées de référence  $\mathbf{r} = (r, s, t)$  où :

$$\begin{cases} r + s + t \leq 1 \\ r \geq 0 \\ s \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Les fonctions d'interpolation géométrique nécessaires à la transformation des tétraèdres à 4 noeuds sont :

$$\begin{aligned}
N_1^t &= 1 - r - s - t \\
N_2^t &= r \\
N_3^t &= s \\
N_4^t &= t
\end{aligned} \tag{3.16}$$

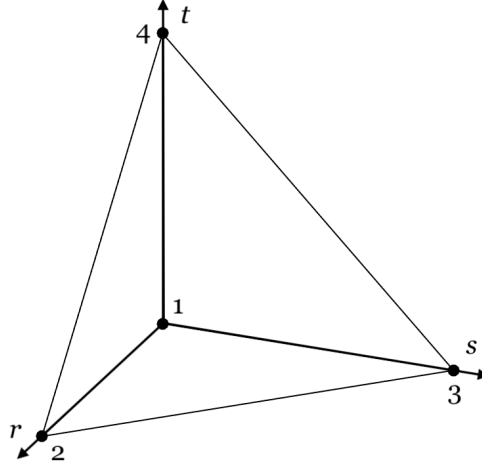


Figure 3.2 Élément de référence tétraèdre à 4 noeuds

### 3.2.2 Stabilisation SUPG-PSPG

L'élément P1-P1 présenté ci-dessus a cependant un problème : il ne respecte pas la condition de LBB (Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi) (Brezzi and Fortin, 1991). C'est donc dire que cet élément est instable. Heureusement, il existe différentes méthodes de stabilisation qui permettent de remédier à ce défaut. Dans le cadre de ce projet, on utilise la méthode SUPG-PSPG présentée par Tezduyar (2002).

La stabilisation SUPG-PSPG combine en fait trois types de stabilisation. La première est la stabilisation SUPG (*Streamline Upwind Petrov Galerkin*) proposée pour la première fois par Brooks and Hughes (1982). Elle a pour but de réduire les oscillations numériques liées aux effets convectifs en introduisant une diffusion artificielle dans le sens de l'écoulement. On y parvient en effectuant une modification à la fonction test de vitesse d'origine comme suit :

$$\delta \tilde{\mathbf{u}} = \delta \mathbf{u} + \tau_{SUPG}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \quad (3.17)$$

La seconde est la stabilisation PSPG (*Pressure Stabilizing Petrov Galerkin*). Celle-ci est nécessaire lorsque les éléments ne respectent pas la condition LBB. Sans cette stabilisation, on observe une distribution de la pression en damier. On modifie encore une fois la fonction test de la vitesse telle que :

$$\delta \tilde{\mathbf{u}} = \delta \mathbf{u} + \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \nabla \delta p \quad (3.18)$$

Finalement, la dernière stabilisation consiste à ajouter un terme de moindres carrés basé

sur la contrainte d'incompressibilité GLS (*Galerkin Least-Squares*) proposé par Hughes et al. (1989). Ce terme s'écrit :

$$\int_{\Omega} \tau_{LSIC} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (3.19)$$

Le calcul des coefficients  $\tau_{SUPG}$ ,  $\tau_{PSPG}$  et  $\tau_{LSIC}$  fait intervenir plusieurs paramètres du problème dont la vitesse convective, la taille des éléments ainsi que quelques constantes permettant de doser chacun des termes de stabilisation. Leurs calculs sont détaillés dans Tezduyar (2002). Avec l'ajout des termes de stabilisation, les équations (3.11) et (3.12) s'écrivent maintenant :

$$\int_{\Omega} \delta p (\nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\tau_{PSPG}}{\rho} \nabla \delta p \cdot \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f} \right) d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \tau_{SUPG} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \cdot \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{f} \right) d\Omega \\ + \int_{\Omega} \tau_{LSIC} \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.21)$$

On remarque, dans les équations (3.20) et (3.21), que les termes de stabilisation dépendent du résidu des équations de Navier-Stokes. L'effet de la stabilisation est donc annulé lorsque celles-ci sont vérifiées.

### 3.2.3 Intégration temporelle (Méthode BDF)

À toutes fins utiles, les écoulements diphasiques sont des phénomènes transitoires. Pour ce faire, CADIYF propose plusieurs options d'intégration temporelle. La méthode préférée est de type BDF (*Backward Differentiation Formula*) d'ordre 1 à 5. Cependant, il est bien connu que les méthodes BDF d'ordre élevé sont instables. C'est pourquoi on utilise une adaptation en temps et en ordre (*hp*) basée sur une estimation de l'erreur qui garantit la stabilité de la solution. Ici, on présentera une brève introduction aux méthodes BDF d'ordre  $p$ . Plus d'informations sur l'adaptation *hp* de CADIYF est disponible dans l'article de Hay et al. (2015).

L'intégration temporelle est un problème aux valeurs initiales qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_o \end{cases} \quad (3.22)$$

La dérivation des méthodes BDF commence par l'écriture de l'équation (3.22) au temps  $t_{n+1}$  :

$$y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \quad (3.23)$$

Le choix de l'instant  $t_{n+1}$  donne une formulation implicite. Un choix de  $t = t_n$  résulterait en une méthode explicite.

Pour obtenir une approximation de la dérivée  $y'(t_{n+1})$ , on utilise les polynômes d'intégration de Newton d'ordre  $p$  qui interpolent  $y_j$  au temps  $t_j$  pour  $j = n+1, \dots, n+1-p$ . Ils s'écrivent :

$$q(t) = \sum_{j=0}^p \left[ \prod_{i=0}^{j-1} (t - t_{n+1-i}) \right] \delta^j y \quad (3.24)$$

où  $\delta^j y$  est la différence divisée d'ordre  $j$  définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} \delta^0 y = \delta^0[y_{n+1}] = y_{n+1} \\ \delta^j y = \delta^j[y_{n+1}, \dots, y_{n+1-j}] = \frac{\delta^{j-1}[y_{n+1}, \dots, y_{n+2-j}] - \delta^{j-1}[y_n, \dots, y_{n+1-j}]}{t_{n+1} - t_{n+1-j}} \end{cases} \quad (3.25)$$

La dérivée temporelle  $y'(t_{n+1})$  s'approxime par la dérivée de  $q(t)$  évaluée au temps  $t_{n+1}$  :

$$q'(t) = \sum_{j=1}^p \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (t_{n+1} - t_{n+1-i}) \right] \delta^j y = \sum_{i=0}^p a_i y_{n+1-i} \quad (3.26)$$

Les coefficients  $a_i$  s'obtiennent à partir des différences divisées. Notons que  $a_i$  dépend du pas de temps  $h$  et de l'ordre  $p$ .

On peut maintenant substituer cette approximation de  $y'(t_{n+1})$  dans l'équation (3.23) pour obtenir une formulation générale des méthodes BDF implicites d'ordre  $p$  :

$$\sum_{i=0}^p a_i y_{n+1-i} = f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \quad (3.27)$$

La résolution de cette équation mène à la valeur recherchée  $y_{n+1}$ . La stabilité de cette résolution dépend des coefficients  $a_i$ , et donc, du pas de temps  $h$  et de l'ordre  $p$ . Dans CADYF, ces 2 quantités sont adaptées en fonction de l'erreur estimée (Hay et al., 2015).

### 3.2.4 Formulation ALE et maillage Pseudo-Solide

Jusqu'à maintenant, on a fait l'hypothèse que le maillage de la solution et le domaine étaient fixes. En mécanique des fluides, on appelle cette approche la formulation Euleurienne. À l'inverse, il est possible d'utiliser un référentiel qui suit les particules du fluide dans leur mouvement. Cette approche est la formulation Lagrangienne. Maintenant, il existe une méthode qui se situe à mi-chemin entre les deux. Il s'agit de la formulation ALE (*Arbitrary Lagrangian Euleurian*). Dans cette approche, on peut faire bouger le domaine de manière indépendante de la vitesse du fluide. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, ces méthodes sont particulièrement utiles pour la résolution des écoulements diphasiques puisqu'elles permettent de déplacer le maillage librement pour suivre le déplacement de l'interface.

Puisque le fluide se déplace par rapport à un référentiel qui est lui aussi en mouvement, on doit modifier l'équation du mouvement de manière à introduire le déplacement du domaine. L'équation (3.4) devient alors :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad (3.28)$$

Sa forme faible s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega(t)} \rho ((\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega(t)} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \\ \int_{\Gamma_N(t)} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{n}}) \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.29)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse ALE. Comme son nom l'indique, le choix de cette vitesse est arbitraire. Elle peut être complètement indépendante de la physique du problème. Cependant, d'un point de vue numérique, il est judicieux d'utiliser la vitesse de déplacement du maillage comme la vitesse ALE. Si l'on définit  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$  comme la position des noeuds du maillage à tout instant, on a :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \quad (3.30)$$



La formulation ALE des équations de Navier-Stokes et son implémentation dans Cadyf sont décrites dans Hay et al. (2014) et Étienne et al. (2009).

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, il existe plusieurs méthodes afin de propager le déplacement de l'interface dans l'ensemble du maillage. Cadyf utilise la méthode du pseudo-solide de Sackinger et al. (1996). Cette méthode consiste à considérer le maillage comme un solide élastique en équilibre statique. En considérant une densité nulle pour le solide et aucune force externe, l'équilibre statique s'écrit :

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{S}$  est le tenseur de contraintes de Cauchy. Suivant la loi de Hooke pour les solides élastiques isotropes, celui-ci s'écrit :

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (3.32)$$

avec  $\lambda$  et  $\mu$ , les coefficients de Lamé,  $\mathbf{I}$  la matrice identité et  $\mathbf{E}$ , le tenseur de contraintes d'Euler tel que :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^t] \quad (3.33)$$

où  $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$  sont les déplacements des noeuds par rapport aux coordonnées cartésiennes.

### 3.2.5 Méthode des réactions

Nous avons vu à la section 3.1.2 que la continuité des forces tangentielles et l'application de la tension superficielle sont deux conditions physiques nécessaires à l'interface entre deux fluides. Pour appliquer ces conditions, on doit connaître les efforts de pression existant à cette frontière. À cet effet, on utilise la méthode des réactions.

La méthode des réactions utilise le principe que, pour atteindre une condition de Dirichlet au noeud (c.à-d.  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$ ), il faut une certaine force  $\mathbf{f}_{reaction}$ . On détermine cette force en ajustant la manière dont on assemble le système matriciel. On écrit le système d'équations de Navier-Stokes comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_{reaction} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

avec  $\mathbf{u}$ , les inconnues de vitesses et  $\mathbf{u}_D$ , les conditions de Dirchlet.

Après quelques manipulations et simplifications, le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{f}_{reaction} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{u}_D \\ \mathbf{A}_{22}\mathbf{u}_D \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

On obtient donc un système pour lequel les efforts de réaction  $\mathbf{f}_{reaction}$  sont des inconnues.

Nous verrons, dans la section 3.3.2 comment ces efforts seront utilisés pour l'application des conditions d'interface à la frontière fluide-fluide.

### 3.2.6 Résolution de la matrice (méthode de Newton)

Le logiciel CADYF résout les équations de manière monolithique. C'est-à-dire que toutes les variables dépendantes du problème sont résolues en même temps, dans le même système matriciel. Au total, nous avons 10 inconnues :  $u, v, w, \xi, \eta, \zeta, f_x, f_y, f_z$  et  $p$ . L'ensemble de ces équations forment un système matriciel de la forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.36)$$

La nature du problème (c.-à-d. les termes convectifs) force l'utilisation d'une méthode itérative comme, par exemple, la méthode de Newton-Raphson. Dans ce cas, le système s'écrit :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}^n)\delta\mathbf{x} = -\mathbf{R}(\mathbf{x}^n) \quad (3.37)$$

où  $\delta\mathbf{x}$  est la perturbation de la valeur telle que  $\mathbf{x}^{n-1} + \delta\mathbf{x} = \mathbf{x}^n$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{x}^n)$  est le résidu aux équations à résoudre et  $\mathcal{J}(\mathbf{x}^n)$  est la matrice jacobienne du système. Cette dernière peut être calculée analytiquement. Cependant, il est souvent plus simple de la calculer de manière numérique (c.-à-d. par perturbation du résidu).

Étant donnée une solution initiale  $\mathbf{x}^0$ , on peut supposer que la solution convergera vers un résidu nul ( $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ ). On arrête la résolution lorsque les deux critères suivants sont satisfaits :

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \varepsilon_1 \quad (3.38)$$

$$\frac{\|\mathbf{R}(\mathbf{x}^n)\|}{\|\mathbf{R}(\mathbf{x}^0)\|} \leq \varepsilon_2 \quad (3.39)$$

où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des paramètres déterminés par l'utilisateur.

Le calcul numérique de la matrice jacobienne est une procédure coûteuse, car elle nécessite le recalcul des résidus suite à la perturbation d'une variable, et ce, pour chaque variable. Pour limiter le temps de calcul associé à la construction de cette matrice, on utilise une procédure de factorisation adaptative. Celle-ci permet de réutiliser la matrice de l'itération précédente, si la convergence est significative.

### 3.3 Implémentation de la résolution de l'interface

Jusqu'à maintenant, les méthodes présentées étaient déjà implémentées dans le logiciel CADYF (à l'exception des termes de stabilisation). Les sections suivantes présentent la résolution numérique de l'interface et les termes qui ont été ajoutés au logiciel.

#### 3.3.1 Interface Eulerienne-Lagrangienne

Les méthodes Eulerienne-Lagrangienne, ou ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*), de résolution de l'interface ont été abordées au chapitre 2. Nous y avons vu les avantages et les désavantages de ce type d'approche. Ici, nous verrons plus en détail comment cette méthode a été implémentée dans le logiciel CADYF.

Comme nous le savons déjà, les méthodes de type ALE utilisent une description Lagrangienne de l'interface. C'est donc dire que celle-ci est aussi représentée par des éléments géométriques simples. Le maillage de l'interface est intégré au maillage général de la solution (voir figure 3.3). Le mouvement de l'interface induit une déformation des éléments à travers l'ensemble du domaine. Cette déformation est régie par les équations du pseudo-solide (voir section 3.2.4). Si celle-ci devient trop importante, et que les éléments deviennent trop élancés, on procède à une étape de remaillage. C'est-à-dire que la solution est arrêtée, un maillage est recalculé à partir de la solution actuelle puis celle-ci est interpolée sur le nouveau maillage. Dans notre cas, on ne prévoit pas avoir recours à ce type de méthode, mais ceci a déjà été fait à l'aide du code CADYF (voir Lortie (2018)).

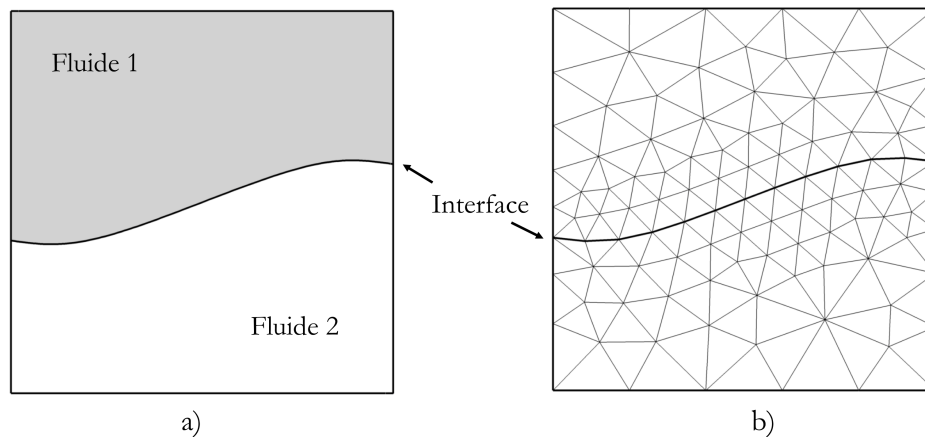


Figure 3.3 Exemple 2D d'un domaine diphasique séparé par une interface discrète. a) Domaine diphasique séparé par l'interface. b) Maillage du domaine.

On représente l'interface à l'aide d'éléments nommés : éléments d'interfaces (voir figure 3.4). Il s'agit d'éléments prismes triangulaires dont l'épaisseur est nulle. Ceux-ci sont construits à partir de deux faces coïncidentes provenant chacune d'un tétraèdre des domaines fluide. Ses noeuds sont séparés en ensemble qui les associe à un des deux fluides. Ces ensembles sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{ext} &= \{1, 2, 3\} \\ \mathbf{int} &= \{4, 5, 6\} \end{aligned} \tag{3.40}$$

où  $\mathbf{ext}$  représente les noeuds appartenant au domaine  $\Omega_1$  et  $\mathbf{int}$  représente les noeuds appartenant au domaine  $\Omega_2$ .

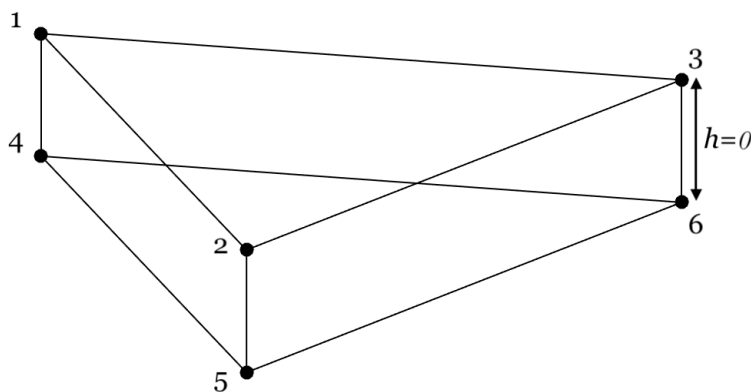


Figure 3.4 Élément d'interface

Les éléments d'interface offrent la connectivité entre les deux domaines qui facilite l'application des conditions d'interface présentée à la section suivante.

### 3.3.2 Application des conditions d'interface

Maintenant que la connectivité entre les deux domaines est disponible grâce aux éléments d'interface, on est en mesure d'assembler les équations nécessaires à la résolution de l'interface.

Parmi les conditions à appliquer, on retrouve des conditions physiques : la continuité des vitesses, la continuité des contraintes, la tension superficielle et la non-pénétration des fluides, et une condition non physique (la régularisation du maillage).

#### Continuité des vitesses

Pour assurer la continuité des vitesses de part et d'autre de l'interface, les équations assemblées aux noeuds **ext** de l'interface sont remplacées par l'équation suivante :

$$\mathbf{u}_{ext} = \mathbf{u}_{int} \quad \forall N_i \in \{\mathbf{ext}\} \quad (3.41)$$

On remarque que la condition aux noeuds **ext** de l'interface devient une condition de Dirichlet. Il est donc possible d'utiliser la méthode des réactions afin de calculer les contraintes à ces noeuds (voir section 3.2.5). La vitesse  $\mathbf{u}_{int}$  est calculée à partir des équations de Navier-Stokes auxquelles on ajoutera les contraintes qui seront calculées lors de l'application de la tension de surface et de la continuité des contraintes. Cela permettra aux deux domaines de communiquer le même référentiel de pression.

#### Continuité des contraintes et application de la tension superficielle

Ces deux conditions agissent sur les mêmes variables, c'est pourquoi on les traite en même temps. Ici, on s'assure que la différence des contraintes de part et d'autre de l'interface soit égale à la tension de surface. Celle-ci doit être dirigée dans la direction normale à l'interface. Connaissant les contraintes aux noeuds **ext**, cette condition est appliquée aux noeuds **int** de l'interface. Ce qui revient à appliquer :

$$\boldsymbol{\sigma}_{int} = \boldsymbol{\sigma}_{ext} + \gamma \hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad \forall N_i \in \{\mathbf{int}\} \quad (3.42)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale unitaire à l'interface et l'expression  $\gamma \hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})$  représente la contrainte de tension superficielle. Son calcul est présenté à la section suivante.

### Déplacement des noeuds d'interface et régularisation du maillage

Les équations permettant d'effectuer le déplacement des éléments d'interface sont issues de conditions physique et non physique. En effet, on doit s'assurer que la vitesse normale de déplacement de l'interface soit égale à la vitesse normale du fluide à l'interface (condition physique de non-pénétration). Cela assure qu'aucun des fluides ne quitte son domaine. La masse est alors conservée. On doit aussi permettre un mouvement des noeuds d'interface dans la direction tangentielle afin de conserver le maillage de surface le plus régulier possible (condition non physique).

La première équation qui permet de déterminer le déplacement des noeuds d'interface (issue de la condition physique) est :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.43)$$

Afin de s'assurer que le maillage soit le plus régulier possible, on a testé deux options. La première consistait à libérer les contraintes associées au pseudo-solide dans la direction tangentielle à l'interface. Ainsi, l'ensemble des noeuds sont libres de se déplacer de manière à minimiser l'énergie. Cependant, une seconde méthode s'est avérée tout aussi efficace, et ce, pour un développement moindre auprès du code. Il s'agit d'effectuer un barycentrage des vitesses de déplacement des noeuds de l'interface dans sa direction tangentielle. Les deux autres équations nécessaires afin de fermer notre système d'équations sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 &= \sum_{v=1}^V \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_v}{\partial t} / V \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 \\ \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 &= \sum_{v=1}^V \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_v}{\partial t} / V \cdot \hat{\mathbf{t}}_2 \quad \forall N_i \in \{\mathbf{int}\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

où  $\hat{\mathbf{t}}_1$  et  $\hat{\mathbf{t}}_2$  sont deux tangentes orthogonales à l'interface et  $V$  est la valence du noeud (nombre de noeuds voisins). Il est suffisant d'appliquer ces équations d'un seul côté de l'interface. Dans notre cas, il s'agit des noeuds **int**. De l'autre côté, on égalise les vitesses des déplacements :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{ext}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{int}}{\partial t} \quad \forall N_i \in \{\mathbf{ext}\} \quad (3.45)$$

### 3.3.3 Calcul de la courbure et de la tension superficielle

Dans cette section, nous verrons les méthodes utilisées pour calculer la courbure aux noeuds de l'interface ainsi que pour calculer la tension superficielle.

#### Calcul de la courbure

Les éléments P1-P1 utilisés sont isoparamétriques. C'est-à-dire que le degré de précision géométrique est égal au degré de précision de la vitesse. Chaque élément représente une géométrie linéaire (plane) dont la courbure est nulle. Pour connaître la courbure à un noeud — qui est nécessaire pour le calcul de la tension superficielle — il nous faut utiliser une méthode particulière qui utilisera l'information de tous les éléments voisins à ce noeud. La méthode la plus connue est celle de Meyer et al. (2002). C'est sur cette méthode que se base le calcul de la courbure implémentée dans CADYF.

La méthode de Meyer et al. (2002) permet de calculer l'opérateur de courbure normale moyenne, aussi appelé opérateur de Laplace-Beltrami, pour une discrétisation géométrique linéaire des variétés de dimension 2. Celui-ci se calcule de la manière suivante :

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2A_{voronoi}} \sum_{v=1}^V [(\cot \theta_{1v} + \cot \theta_{2v})(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_v)] \quad (3.46)$$

où  $V$  est la valence (nombre de voisin) du noeud et  $\theta_{1v}$  et  $\theta_{2v}$  sont les angles opposés au segment  $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_v)$  (voir figure 3.5). L'aire  $A_{voronoi}$  est l'aire totale de la région de Voronoi autour du noeud. Elle s'obtient comme suit :

$$A_{voronoi} = \frac{1}{8} \sum_{v=1}^V [(\cot \theta_{1v} + \cot \theta_{2v}) \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_v\|^2] \quad (3.47)$$

En utilisant l'opérateur de courbure normale moyenne, on peut déterminer la courbure moyenne de la manière suivante :

$$H(\mathbf{x}_i) = \frac{\|\mathbf{K}(\mathbf{x}_i)\|}{2} \quad (3.48)$$

Celle-ci sera utilisée dans le calcul de la tension superficielle.

Il est connu que cette procédure n'est pas efficace si il y a des angles largement supérieurs à  $90^\circ$  dans le maillage de l'interface. Dans la procédure de Meyer et al. (2002), l'aire  $A_{voronoi}$  est remplacée par une aire mixte qui utilise l'aire réelle d'un l'élément voisin si celui-ci contient

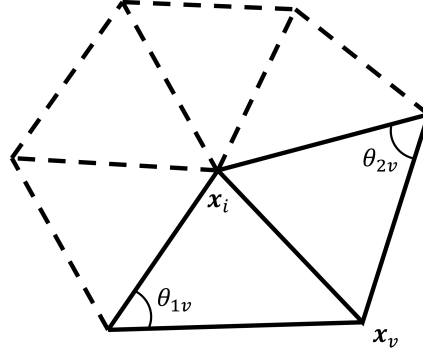


Figure 3.5 Angles opposés à au segment  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_v$

un angle obtus. Cela est censé améliorer le calcul de la courbure lorsqu'il y a angles obtus. Sur le plan pratique, cet algorithme a plutôt réduit la qualité de nos résultats. On utilise donc simplement l'aire de Voronoi. La régularité du maillage le long de l'interface est alors d'autant plus importante.

### Calcul de la tension superficielle

La tension superficielle est proportionnelle à la courbure de l'interface entre les deux fluides. La force est balancée par un saut de pression qui est donné par l'équation de Young-Laplace :

$$\begin{aligned}\Delta p &= \gamma \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \\ &= 2\gamma H\end{aligned}\tag{3.49}$$

où  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont les courbures principales à l'interface. En pratique, on applique la tension superficielle en imposant explicitement ce saut de pression aux noeuds de l'interface. Ceci est fait à l'aide des équations de contraintes qui s'expriment sous forme de force surfacique. La contrainte à ajouter aux noeuds s'écrit :

$$\int_A \Delta p \hat{\mathbf{n}} dA \rightarrow \underbrace{\sum_{v=1}^V \frac{2\gamma H A_v}{3} \hat{\mathbf{n}}}_{\text{Saut de contraintes normal}}\tag{3.50}$$

où  $A_v$  est l'aire de l'élément traité. La division par 3 provient du fait que nous avons 3 noeuds par élément sur lesquels nous devons répartir la contrainte. On rappelle que la contrainte intérieure sera ajoutée sous forme de terme source aux équations de Navier-Stokes du domaine



intérieur. C'est alors via ce terme source que la tension superficielle impose le saut de pression. La normale de l'interface est calculée à partir de l'ensemble des normales provenant de chaque élément :

$$\hat{\mathbf{n}} = \sum_{v=1}^V \hat{\mathbf{n}}_v / V \quad (3.51)$$

On calcule ensuite les deux vecteurs tangentiels  $\hat{\mathbf{t}}_1$  et  $\hat{\mathbf{t}}_2$  à partir de la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  en conservant leur direction la plus régulière possible.

Le calcul de la courbure et l'application de la tension superficielle sont des éléments critiques pour réussir à modéliser les phénomènes physiques à petites échelles. On vérifiera l'implémentation de ceux-ci dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION

Il suffit de consulter un dictionnaire pour constater que, dans le langage courant, les mots vérification et validation sont synonymes. Cependant, dans le jargon du calcul numérique, ces termes ont des significations différentes. Pour des raisons historiques, la vérification et la validation s'effectuent en 2 étapes : la vérification de code et la validation de simulations. Ces deux étapes doivent être complétées avec soins lors du développement ou de l'utilisation d'un code de simulation. Dans ce chapitre, nous effectuerons la vérification du code à l'aide de solutions analytiques. On verra ensuite quelques notions théoriques nécessaires pour la suite. Finalement, on effectuera la validation du modèle.

### 4.1 Vérification

La vérification d'un code de calcul permet de savoir si les équations sont correctement résolues. Elle permet également d'évaluer le taux de convergence de la méthode. L'idéal est d'utiliser des solutions analytiques à titre comparatif. Malheureusement, elles sont rares dans le cas des équations de Navier-Stokes. De plus, elles sont trop simples pour garantir qu'on exerce tous les termes dans les EDP. Le code de calcul CADYF est rigoureusement vérifié par les étudiants, sous la direction du Prof. D. Pelletier. Pour ce faire, on utilise généralement la méthode des solutions manufacturées (MMS) présentée par Roache (2002) qui permet de développer une solution exacte sans se préoccuper de son réalisme physique. La MMS est utilisées régulièrement pour vérifier les nouvelles versions du code. On peut donc supposer que le code résout correctement ses équations. Dans notre cas, on n'utilise pas cette méthode. En écoulement diphasique, les solutions manufacturées peuvent être très complexes si l'on tente de vérifier l'ensemble des termes. On utilisera plutôt deux cas simples qui permettront de vérifier deux aspects critiques de l'application des conditions d'interface : le calcul de la courbure et le saut de pression induit par la tension de surface. Les autres conditions sont triviales à vérifier.

#### 4.1.1 Calcul de la courbure

Le premier cas de vérification permet de nous assurer que la méthode de calcul de la courbure est implémentée correctement. Pour ce faire, on utilise des géométries dont on connaît la valeur théorique de la courbure moyenne  $H$  (voir équation 3.49). Ici, on considèrera une sphère dont la courbure est constante puis un sphéroïde dont la courbure moyenne est donnée

par :

$$H_{spherode} = \frac{a (2b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \beta)}{2b (b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \beta)^{3/2}} \quad (4.1)$$

où  $a$  est la longueur du demi-axe polaire,  $b$  est la longueur du demi-axe équatorial et  $\beta$  est la latitude réduite comprise entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

Pour la sphère, on pose  $r = 0.5$ . La courbure moyenne exacte est donc  $H_{sphere} = 2$ . Pour le sphéroïde, on choisi  $a = 0.5$  et  $b = 0.55$ . La courbure varie donc entre  $H_{spherode} = 1.65$  et  $H_{spherode} = 2.01$  telle que présentée à la figure 4.1.

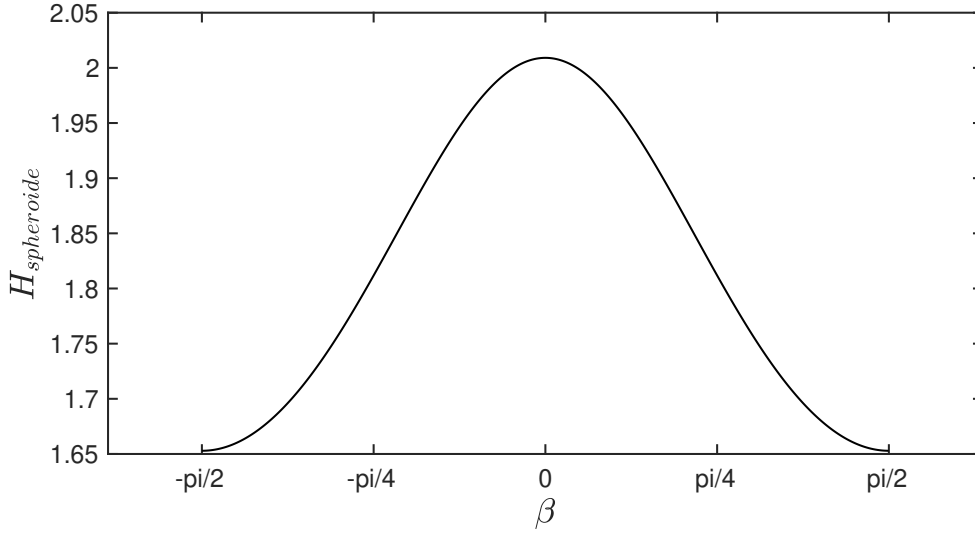


Figure 4.1 Variation de la courbure moyenne de la sphéroïde  $H_{spherode}$  en fonction de la latitude réduite  $\beta$

Pour chaque géométrie, on génère trois maillages de surface de tailles caractéristiques  $l_c$  différentes. On calcule avec CADYF la courbure pour chacun des maillages à l'aide de la méthode présentée à la section 3.3.3. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1 et à la figure 4.2. On y présente l'erreur relative sur l'ensemble des noeuds et l'écart type.

L'erreur est obtenue par la relation suivante :

$$\text{Erreur} = \sqrt{\frac{\sum (H_i - H_e)^2}{\sum (H_e)^2}} \quad (4.2)$$

avec  $H_i$  la courbure moyenne obtenue aux noeuds du maillage et  $H_e$  la courbure moyenne

Tableau 4.1 Résultats du calcul de la courbure

Sphère			Sphéroïde		
$l_c$	Erreur (%)	Écart Type	$l_c$	Erreur (%)	Écart Type
$r/4$	0.0144	$1.75 \times 10^{-5}$	$a/4$	0.2269	$2.39 \times 10^{-4}$
$r/6$	0.0118	$9.89 \times 10^{-6}$	$a/6$	0.2087	$1.55 \times 10^{-4}$
$r/9$	0.0019	$1.05 \times 10^{-6}$	$a/9$	0.1465	$7.24 \times 10^{-5}$

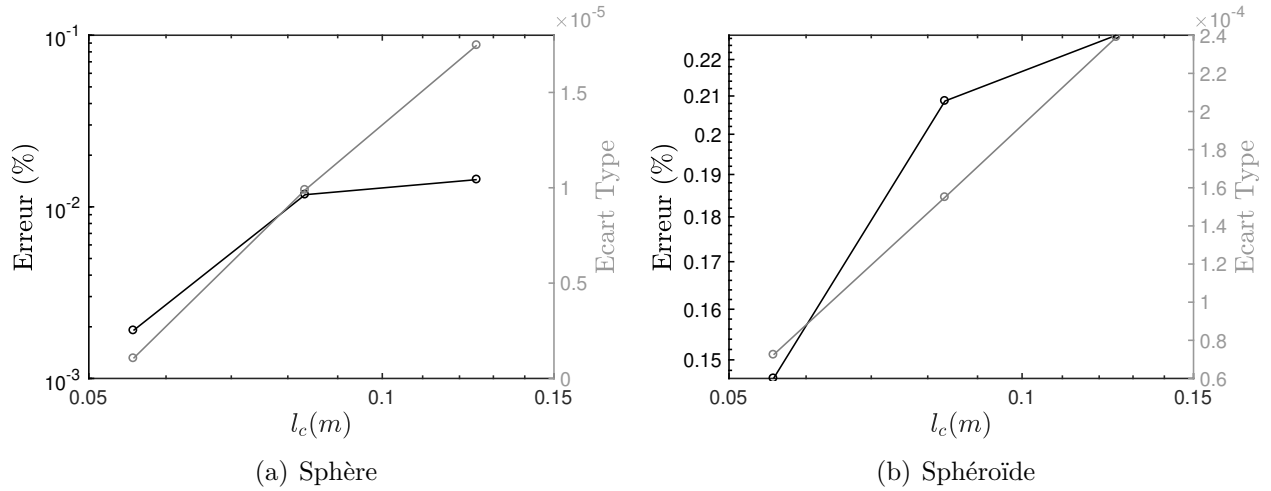


Figure 4.2 Erreur et écart type sur le calcul de la courbure en fonction de la taille caractéristique des éléments

exacte.

Tout d'abord, on peut voir que les erreurs de calcul sont faibles, en particulier dans le cas de la sphère. De plus, on remarque que les deux cas convergent de manière similaire en fonction de la taille du maillage. Cette convergence n'était pas assurée puisque, tel que mentionné à la section 3.3.3, la précision de la méthode utilisée est fortement régie par les angles du maillage et ceux-ci ne sont pas directement liés à la taille des éléments. En effet, il n'est pas possible de déterminer une relation entre la taille caractéristique et les angles du maillage, mais on peut tout de même affirmer, de manière qualitative, que le maillage généré est plus régulier pour de faibles tailles caractéristiques. À la lumière de ces résultats, on peut dire que la méthode de calcul de la courbure est efficace et qu'elle a été implémentée correctement.

### 4.1.2 Saut de pression

Le second cas de vérification permet s'assurer que la tension de surface a bien été implémentée. On vérifie alors le saut de pression induit par la tension de surface à travers l'interface d'une bulle sphérique. La différence de pression théorique nous est donnée par la relation de Young-Laplace :

$$\begin{aligned}\Delta p &= -\gamma \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}_I \\ &= 2\gamma H\end{aligned}\tag{4.3}$$

En posant  $\gamma = 1$  et un rayon de  $r = 0.5$ , on prévoit observer un saut de pression  $\Delta p = 4$ . Encore une fois, on effectue le cas sur 3 maillages de tailles caractéristiques différentes afin d'analyser la convergence. Un seul pas de temps est nécessaire afin d'obtenir la solution en pression puisque le cas est statique. Les résultats sont disponibles dans le tableau 4.2 et à la figure 4.3.

Tableau 4.2 Résultats du calcul du saut de pression induite par la tension de surface

Sphère		
$l_c$	Erreur (%)	Écart Type
$r/4$	0.0117	$4.67 \times 10^{-4}$
$r/6$	0.0076	$3.05 \times 10^{-4}$
$r/9$	0.0056	$2.26 \times 10^{-4}$

Encore une fois, on observe des erreurs qui sont faibles et qui convergent avec le raffinement du maillage. On peut donc supposer que la méthode d'application de la tension de surface est efficace. De plus, la convergence en maillage semble plus régulière que lors du calcul de la courbure. L'ordre de convergence est  $\sim 1.7$ . Avec l'utilisation d'éléments P1-P1 qui représentent la pression à l'aide de fonctions d'interpolations linéaires, on peut conclure qu'on a une super-convergence.

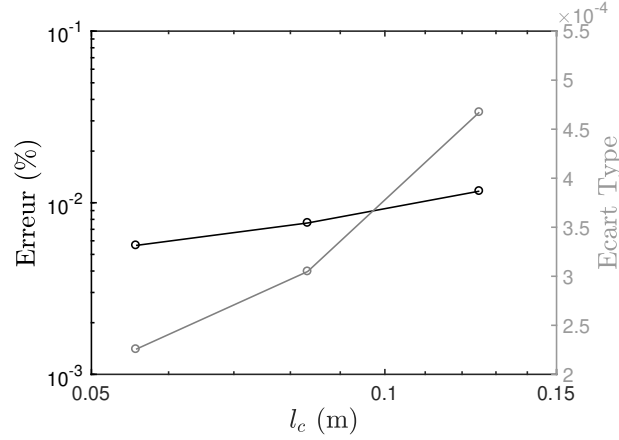


Figure 4.3 Erreur et écart type sur le calcul du saut de pression en fonction de la taille caractéristique des éléments

## 4.2 Aspects théoriques

Avant d'entamer la présentation de ces cas de validation, quelques notions théoriques nécessaires à l'analyse et à la compréhension des résultats seront présentées. Nous verrons une présentation des harmoniques sphériques, une description de l'écoulement potentiel autour d'une bulle et un modèle de prédiction du comportement de bulles basé sur des relations de la littératures.

### 4.2.1 Les harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques sont des fonctions harmoniques particulières qui sont utilisées dans plusieurs domaines de la physique. Elles sont décrites sur la surface d'une sphère (espace  $R^3$ ) et sont orthogonales. Ici, on s'intéresse à celles-ci puisqu'elles permettent de décrire la surface de la bulle, ou encore, une fonction à la surface de la bulle. En effet, les harmoniques sphériques sont utilisées pour décrire l'écoulement potentiel autour d'une bulle. Ceci est fait à la manière d'une décomposition en série de Fourier.

Les harmoniques sphériques sont représentées dans le système de coordonnées sphériques présenté à la figure 4.4.

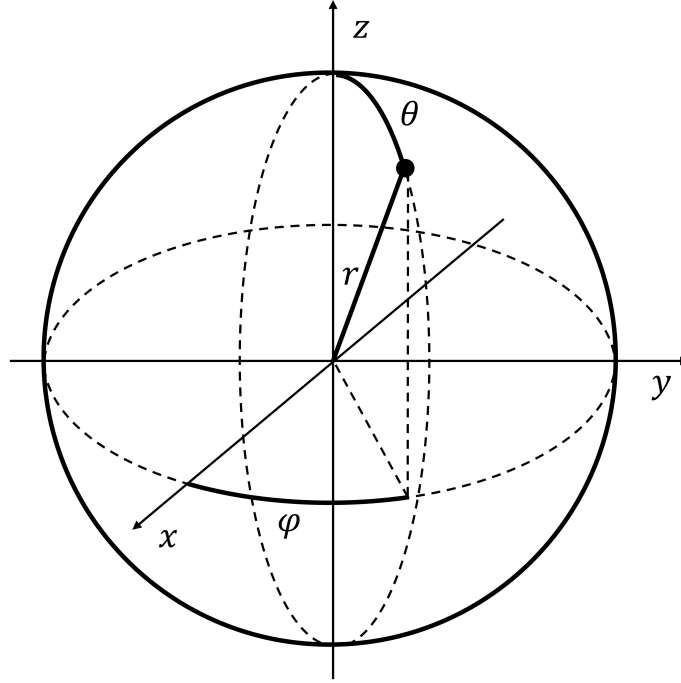


Figure 4.4 Système de coordonnées sphériques suivant la norme ISO

où les coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  peuvent être calculées à partir des coordonnées cartésiennes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 \theta &= \arccos \frac{z}{r} \quad \text{avec } \theta \in [0, \pi[ \quad \text{et} \quad \varphi \in [0, 2\pi[ \\
 \varphi &= \text{atan2}(y, x)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Comme toutes fonctions harmoniques, les harmoniques sphériques proviennent de la solution de l'équation de Laplace suivante :

$$\nabla^2 f = 0 \tag{4.5}$$

En coordonnées sphériques, celle-ci s'écrit :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{4.6}$$

La solution générale de l'équation 4.6 s'écrit :

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell,m} r^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (4.7)$$

où les termes  $r^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$  sont des harmoniques dites solides et  $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$  sont des harmoniques sphériques de degré  $\ell$  et d'ordre  $m$ . Celles-ci s'expriment sous la forme générale suivante :

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_{\ell,|m|}(\cos(\theta)) e^{im\varphi} \quad -\ell \leq m \leq \ell \quad (4.8)$$

avec  $P_{\ell,m}$  est le polynôme de Legendre associé :

$$P_{\ell,m}(x) = \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} [1-x^2]^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} [x^2-1]^{\ell} \quad (4.9)$$

On remarque que les harmoniques sphériques degré  $\ell$  forment un sous-espace vectoriel de dimension  $2\ell+1$ . Elles forment une base orthonormée sur la sphère unité  $\mathbb{S}^2$ . En effet, on peut démontrer que :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \overline{Y_{\ell',m'}(\theta, \varphi)} d\theta d\varphi = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = \ell' \text{ et } m = m' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.10)$$

L'expression analytique des premières harmoniques sphériques est présentée au tableau 4.3.

### Représentation graphique en harmoniques sphériques

La représentation graphique à partir des harmoniques sphériques est régulièrement utilisée afin de représenter des formes complexes en 3 dimensions. Par exemple, la surface de la Terre est souvent représentée avec précision de cette manière, et ce, avec une fraction des données qui seraient nécessaires pour représenter celle-ci point par point. Pour ce faire, on utilise une combinaison linéaire d'harmoniques comme suit :

$$R(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (4.11)$$



Tableau 4.3 Expression analytique des premières harmoniques sphériques

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \\
Y_1^{-1}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \\
Y_1^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta \\
Y_1^1(\theta, \varphi) &= \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\
Y_2^{-2}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} \\
Y_2^{-1}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi} \\
Y_2^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\
Y_2^1(\theta, \varphi) &= \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} \\
Y_2^2(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}
\end{aligned}$$

La combinaison linéaire d'harmonique sphérique de même de degré  $\ell$  est aussi connue sous le nom d'harmonique de surface. On écrit alors souvent :

$$R(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^n S_{\ell}(\theta, \varphi) \quad (4.12)$$

où  $S_{\ell}(\theta, \varphi)$  est l'harmonique de surface d'ordre  $\ell$ . Si la fonction  $R(\theta, \varphi)$  est connue, il nous est possible de calculer les coefficients  $a_{\ell,m}$  grâce à la propriété d'orthogonalité. Ceux-ci se calculent comme suit :

$$\alpha_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R(\theta, \varphi) \overline{Y_{\ell,m}} \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (4.13)$$

Il est intéressant de noter que les coefficients  $\alpha_{\ell,m}$ , qui sont complexes si  $R(\theta, \varphi)$  est une fonction réelle, peuvent être reliés de la manière suivante :

$$\alpha_{\ell,-m} = (-1)^m \overline{\alpha_{\ell,m}} \quad (4.14)$$

Ceci nous permet donc de réduire de moitié le travail nécessaire au calcul des coefficients.

Finalement, il est possible d'observer que la quantité d'énergie contenue sous chaque degré  $\ell$

n'est pas influencée par la rotation autour du point de référence. Autrement dit, la norme  $L_2$  de la somme de tous les coefficients  $\alpha_{\ell,m}$  pour un  $\ell$  donné est invariant à la rotation. Cette propriété peut alors être utilisée afin d'effectuer une représentation qui est indépendante à la rotation de la forme autour de son point de référence (p.ex. Kobbelt et al. (2003)).

### Écoulement potentiel

L'écoulement potentiel est lui aussi une solution de l'équation de Laplace :  $\nabla^2 \Phi = 0$  ; où  $\Phi$  est appelé le potentiel de vitesse. Il est donc convenable d'utiliser les harmoniques sphériques afin de représenter la fonction  $\Phi$ . Pour l'écoulement autour d'une bulle avec son centre comme origine, on suppose une solution de la forme :

$$\Phi_{int}(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell,m} R_{\ell,m}(r, \theta, \phi) \quad (4.15)$$

et

$$\Phi_{ext}(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} g_{\ell,m} I_{\ell,m}(r, \theta, \phi) \quad (4.16)$$

où  $R_{\ell,m}$  et  $I_{\ell,m}$  sont les harmoniques solides régulières et irrégulières respectivement avec  $f_{\ell,m}$  et  $g_{\ell,m}$  leurs coefficients respectifs qui sont à déterminer en fonction des conditions limites liées à la forme de la bulle. Les harmoniques solides s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) &= r^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \\ I_{\ell,m}(r, \theta, \varphi) &= \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

avec  $Y_{\ell,m}$  les harmoniques sphériques normalisées dont l'expression est donnée à l'équation (4.8). Il faut noter que, dans le cas de l'oscillation d'une bulle incompressible qui oscille, les degrés  $\ell = 0$  et  $\ell = 1$  sont oubliés puisqu'ils représentent respectivement la compression et la translation. De plus, dans le but de conserver une symétrie autour de l'axe  $z$ , seul l'ordre  $m = 0$  est nécessaire. On peut donc se référer aux harmoniques sphériques comme étant  $Y_n = Y_{\ell}^0$  avec  $n = \ell$  où  $n$  est le mode de vibration.

La résolution de l'écoulement se limite alors au calcul des coefficients  $f_n$  et  $g_n$ . Pour un nombre fini de modes  $N$ , ces derniers peuvent être calculés numériquement.

### 4.2.2 Modélisation du comportement d'une bulle

Dans cette section, nous verrons une modélisation du comportement d'une bulle via un système de type masse-ressort-amortisseur à deux degrés de liberté. À l'aide de ce modèle, on pourra prédire l'oscillation de la bulle ainsi que son ascension.

Les hypothèses sont les suivantes :

- La forme de la bulle peut être représentée par un sphéroïde (voir figure 4.5).
- L'ascension de la bulle est rectiligne (c.-à-d.  $\mathbf{u} = [0, 0, \dot{z}]$ ).

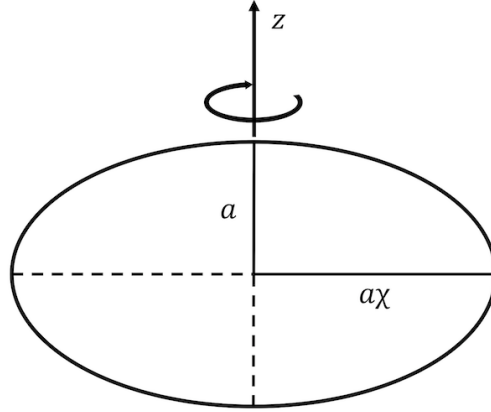


Figure 4.5 Description géométrique de la bulle par un sphéroïde

Les deux degrés de liberté sont donc  $a$  et  $z$ . On s'y réfère comme étant le mode de compression et le mode de translation respectivement. Le facteur  $\chi$  est connu sous le nom de ratio d'aspect. On sait que notre problème est incompressible et que le volume de la bulle est constant, on pose donc les relations suivantes entre  $r_e$ , le rayon équivalent d'une bulle sphérique, et  $a$  et  $\chi$  :

$$\begin{aligned} r_e^3 &= a^3 \chi^2 \\ \chi &= \left( \frac{r_e}{a} \right)^{3/2} \\ a &= \sqrt[3]{\frac{r_e^3}{\chi^2}} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Le modèle utilisé se base sur celui développé par Pelletier et al. (2015) pour l'étude de l'impact entre une bulle et un mur. Les effets du mur ont bien sûr été retirés. Sans ceux-ci, le modèle est de la forme suivante :

$$\rho_c V_e \begin{bmatrix} C_{ma} & 0 \\ 0 & C_{mz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \rho_c A_e \begin{bmatrix} C_{Da} + C_{Maa} & 0 & 0 \\ 0 & C_{Dz} & C_{Mza} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}^2 \\ \dot{z}^2 \\ \dot{a}\dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_\gamma + F_C \\ F_B \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

où  $V_e = \frac{4}{3}\pi r_e^3$  est le volume de la bulle et  $A_e = \pi r_e^2$  est son aire projetée. Les coefficients  $C_m$ ,  $C_D$  et  $C_M$  représentent les coefficients de masse ajoutée, de traînée visqueuse et de Meshchersky respectivement. La force  $F_\gamma$  est la tension superficielle, la force  $F_C$  est la compression induite par l'inertie de la bulle et  $F_B$  est la force d'Archimède (Buoyancy). Les termes de masse ajoutée et de force de Meshchersky s'obtiennent à l'aide du théorème de Bernoulli et de l'écoulement potentiel qui a été présenté plus tôt. Il a été démontré par Legendre et al. (2003) que cette méthode mène à de bonnes relations pour ces termes. Par contre, ce n'est pas le cas pour les termes de forces visqueuses (Moore, 1965).

### Masse ajoutée ( $C_m$ )

Le coefficient de masse ajoutée  $C_{ma}$ , calculée à l'aide de l'écoulement potentiel autour d'une bulle ellipsoïdale, qui est associé au degré de liberté  $a$  est tiré de Kushch et al. (2002). Il s'écrit :

$$C_{ma} = 0.2\chi^{1.17} \quad (4.20)$$

Le coefficient de masse ajoutée d'une sphère, associé au degré de liberté  $z$ , est de 0.5. Cependant, celui-ci varie avec la déformation de la bulle. C'est pourquoi on utilise plutôt le coefficient de masse ajoutée d'un sphéroïde  $C_{mz}$  développé par Klaseboer et al. (2001) :

$$C_{mz} = 0.62\chi - 0.12 \quad (4.21)$$

La relation (4.21) est en fait une linéarisation de l'expression exacte puisque cette dernière n'est pas définie pour  $\chi < 1$ . Les travaux de Pelletier (2014) ont montrés que la relation linéaire représente bien la masse ajoutée d'un sphéroïde pour  $0.9 < \chi < 1.25$ . On note aussi que l'on retrouve  $C_{mz} = 0.5$  quand  $\chi = 1$ .

### Force de Meshchersky ( $C_M$ )

La force de Meshchersky résulte de la variation du coefficient de la masse ajoutée. Pour illustrer cette force, utilisons l'équation de la quantité de mouvement avec une masse variable

$m(a)$  :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{a}) = \frac{dm}{dt}a + m\ddot{a} = \sum F \rightarrow m\ddot{a} = \sum F \underbrace{- \frac{\partial m}{\partial a}\dot{a}^2}_{\text{Meshchersky}} \quad (4.22)$$

On remarque l'apparition d'une force supplémentaire issue de la dépendance de  $m$  à la variable  $a$ . Pour simplifier l'écriture du modèle, on écrit la force sous la forme générale suivante :

$$F_{Mx_1} = -\frac{1}{2}\rho_c A_e C_{Mx_1x_2} \dot{x}_1 \dot{x}_2 \quad (4.23)$$

où l'indice  $x_1$  désigne la variable sur laquelle la force agit et l'indice  $x_2$  désigne la variable dérivée. Dans notre cas, puisque la masse ajoutée ne dépend que de  $a$ , on aura  $x_2 = a$ . Les coefficients  $C_{Mx_1x_2}$  se calculent comme suit :

$$\begin{aligned} C_{Maa} &= \frac{8}{3} \frac{\partial C_{ma}}{\partial \bar{a}} \\ C_{Mza} &= \frac{8}{3} \frac{\partial C_{mz}}{\partial \bar{a}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

où  $\bar{a} = a/r_e$  est le demi-axe polaire adimensionnel.

### Forces visqueuses ( $C_D$ )

Tel que mentionné auparavant, il a été démontré que le calcul des termes de forces visqueuses à partir de la pression dynamique (théorème de Bernoulli) n'est pas satisfaisant. Généralement, on utilise le travail de dissipation, calculé à partir de l'écoulement potentiel, pour l'évaluation de ces termes (Batchelor, 2010). En compression, le coefficient de d'amortissement sur la déformation de la bulle  $C_{Da}$  est obtenu à l'aide la relation tiré de Kushch et al. (2002) :

$$C_{Da} = \frac{128/3}{Re_a} \chi^{1.25} \quad (4.25)$$

où  $Re_a$  est définie comme suit :

$$Re_a = \frac{\rho_c \dot{a} d_e}{\mu_c} \quad (4.26)$$

En translation, plusieurs relations pour le coefficient de traînée d'une bulle ont été proposées. Dans le cas des bulles sphériques, elles se situent entre les relations bien connues de Stokes

( $Re_z \ll 1$ ), pour la sphère solide,  $C_D = 24/Re_z$  et de contraintes de cisaillement nulles  $C_D = 16/Re_z$ . C'est deux relations correspondent aux cas extrêmes où  $\mu^* = \infty$  et  $\mu^* = 0$  respectivement avec  $\mu^* = \mu_d/\mu_c$ . L'ensemble des relations développées pour le cas de bulles sphériques ( $\mu^* \ll 1, \chi \sim 1$ ) ont menées Mei et al. (1994) à proposer la loi empirique suivante :

$$C_{Dz1} = \frac{16}{Re_z} \left( 1 + \left[ \frac{8}{Re_z} + \frac{1}{2} \left( 1 + 3.315 Re_z^{-1/2} \right) \right]^{-1} \right) \quad \text{si } \mu^* \ll 1, \chi \sim 1 \quad (4.27)$$

où  $Re_z$  est définie comme suit :

$$Re_z = \frac{\rho_c \dot{z} d_e}{\mu_c} \quad (4.28)$$

Les simulations numériques de Takagi and Matsumoto (1996) auront montrées une bonne correspondance avec l'équation (4.27) pour des  $Re_z$  allant jusqu'à 200. Cependant, l'augmentation de la taille de la bulle, et donc, de sa vitesse de montée induit une déformation. On entre alors dans le régime de bulles ellipsoïdales. La corrélation de Mei et al. (1994) diverge des mesures observées. Moore (1965) proposa une modification à sa corrélation initiale (Moore, 1963) qui tient compte de la déformation  $\chi$  :

$$C_{Dz2} = \frac{16}{Re_z} G(\chi) \left( 1 + \frac{H(\chi)}{Re_z^{1/2}} \right) \quad \text{si } \mu^* \ll 1, \forall \chi \quad (4.29)$$

avec

$$G(\chi) = \chi^{4/3} (\chi^2 - 1)^{3/2} \frac{\sqrt{\chi^2 - 1} - (2 - \chi^2) \sec^{-1} \chi}{(\chi^2 \sec^{-1} \chi - \sqrt{\chi^2 - 1})^2}$$

et  $H(\chi)$ , initialement proposé sous forme de tabulation, qui peut être approximé par le polynôme suivant :

$$H(\chi) = -0.01084\chi^4 + 0.157\chi^3 - 1.573\chi^2 + 2.019\chi + 1.617$$

Dans les travaux courant, on utilisera  $\max[C_{Dz1}, C_{Dz2}]$  en tant que coefficient de traînée en translation. Cela revient à utiliser la relation (4.27) pour de faibles  $Re_z$  et la relation (4.29) pour des  $Re_z$  plus élevés. La transition se fait autour de  $Re_z = 60$ .

### Force d'Archimède (sur ddl $z$ )

La force d'Archimède, ou *Buyoancy*, est la force à laquelle est soumis un corps de densité différente à celle du fluide dans lequel il est plongé. Sa relation usuelle est :

$$F_B = \Delta\rho V_e g \quad (4.30)$$

### Force de tension superficielle (sur ddl $a$ )

L'énergie potentielle issue de la tension superficielle s'écrit en fonction de la surface d'application comme suit :

$$E_\gamma = \gamma S_b \quad (4.31)$$

où  $S_b$  est la surface de la bulle. Malheureusement, les relations analytiques permettant de calculer la surface d'un sphéroïde ne sont pas définies quand  $\chi = 1$ . C'est pourquoi on utilise plutôt une approximation de la surface en fonction de  $\chi$ . La force de tension superficielle s'écrit alors :

$$F_\gamma = -\frac{\partial E_\gamma}{\partial a} = 3.732r_e(\chi^{1.795} - 1) \quad (4.32)$$

La figure 4.6 présente une comparaison entre la dérivée de la relation analytique de la surface et son approximation pour  $0.8 \leq \chi \leq 1.5$ .

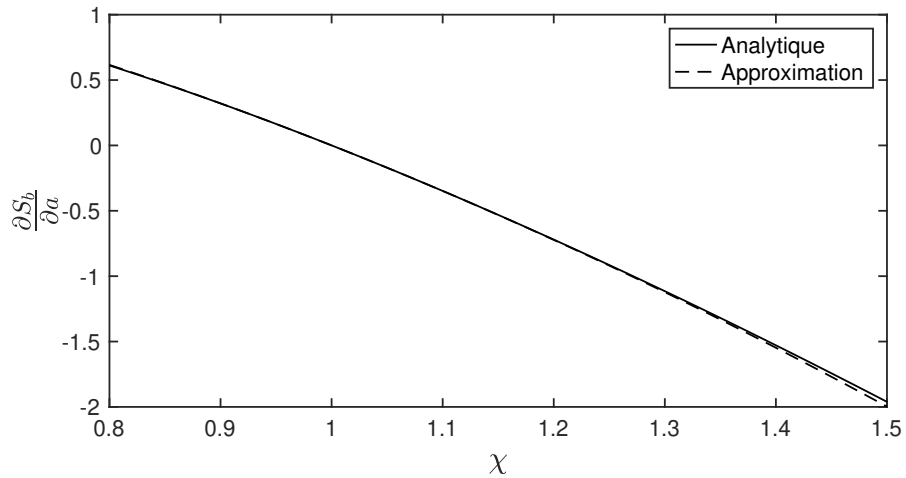


Figure 4.6 Approximation de la dérivée  $\frac{\partial S_b}{\partial a}$ .

### Force de compression (sur ddl $a$ )

La force de compression représente l'effort inertiel qui déforme la bulle lors de son ascension. Dans le but de prédire la déformation de la bulle à son état stationnaire, Moore proposa deux corrélations pour  $\chi$  en utilisant l'hypothèse d'une interface sans cisaillement. La première provient de l'équilibre entre la pression dynamique et la tension de surface sur l'ensemble de la surface (Moore, 1963) :

$$\chi = 1 + \frac{9}{64}We \quad \text{si} \quad We \ll 1 \quad (4.33)$$

Cependant, cette relation se montra valide pour de faibles valeurs de  $We$  seulement. C'est pourquoi une seconde relation a été proposée en n'imposant l'équilibre entre la pression dynamique et la tension de surface qu'au point de stagnation (Moore, 1965) :

$$We(\chi) = 4\chi^{-\frac{4}{3}} (\chi^3 + \chi - 2) \left[ \chi^2 \sec^{-1} \chi - \sqrt{\chi^2 - 1} \right]^2 (\chi^2 - 1)^{-3} \quad (4.34)$$

Afin d'obtenir la valeur de  $\chi$  en fonction de  $We$ , on peut approximer cette dernière relation à l'aide du polynôme suivant :

$$\chi(We) = 0.01608We^4 - 0.05244We^3 + 0.1049We^2 + 0.1083We + 1$$

Les travaux de Duineveld (1995) ont montrés la validité des relations (4.29) et (4.34) pour des bulles dans de l'eau "hyper-clean" jusqu'à  $Re_z = 350$ . Au delà de ces valeurs, la relation (4.34) sur-estime la déformation. Duineveld (1995) suppose qu'il s'agit probablement du fait que la bulle perd, à ce moment, sa symétrie avant-arrière.

Plus tard, l'ensemble des expériences et des simulations numériques effectuées ont mené Legendre et al. (2012) à développer une relation en fonction du  $We$  et du  $M$  :

$$\chi = \frac{1}{1 - \frac{9}{64}We(1 + K(M)We)^{-1}} \quad (4.35)$$

avec

$$K(M) = 0.2M^{0.1}$$

Contrairement aux équations (4.33) et (4.34), cette dernière est valide pour plusieurs combinaisons de fluides. Dans le cas des fluides avec une faible viscosité, comme l'eau, la fonction  $K(M)$  peut être négligé. On obtient alors :



$$\chi = \frac{1}{1 - \frac{9}{64}We} \quad (4.36)$$

On écrit la force de compression sous la forme générale suivante :

$$F_C = -\frac{1}{2}\rho_c A_e C_C \dot{z}^2 \quad (4.37)$$

où le coefficient  $C_c$  est le coefficient de compression. Il n'existe cependant pas de corrélation pour déterminer ce coefficient. On déterminera donc celui-ci de manière à ce que, à l'état stationnaire ( $\dot{a} = 0, \dot{z} = 0$ ), la relation (4.34) ou (4.36) soit vérifiée et que l'équilibre entre la force de compression et la force de tension superficielle soit atteint ( $F_C = F_\gamma$ ).

### 4.3 Validation

Dans cette section on vérifiera que l'outil développé représente correctement la physique des écoulements à phases séparées. On utilise alors des cas pratiques dont les solutions sont connues, mais ne sont pas exactes. Nous utiliserons deux cas qui se rapprochent du problème qui sera étudié au chapitre 5 et des travaux futurs qui sont prévus dans le cadre de la Chaire de recherche. Les cas choisis sont : l'oscillation de la bulle et l'ascension de la bulle. On pourra alors comparer nos résultats numériques au modèle à 2 degrés de liberté présenté précédemment.

#### 4.3.1 Oscillation de la bulle

L'oscillation de la bulle autour de sa position d'équilibre est un problème de validation typique pour les modèles numériques d'écoulements diphasiques (voir Perot and Nallapati (2003), Quan and Schmidt (2007), Tukovic and Jasak (2012) et Anjos et al. (2014)). Il s'agit d'étudier une bulle qui est initialement déformée en sphéroïde et qui oscille par rapport sa position d'équilibre : la sphère. Cette oscillation est induite par la force de tension superficielle qui agit en tant que raideur dans le système. Il s'agit alors d'un bon cas pour valider le modèle de la tension superficielle.

La géométrie du problème est présentée à la figure 4.7. On remarque l'utilisation d'un huitième du domaine afin de fixer la bulle dans l'espace et réduire le temps de calcul. Cela nous limite à l'étude des modes pairs, mais ceci n'est pas un problème majeur puisque le mode principal lors de l'oscillation d'un sphéroïde est le mode 2. La bulle est initialement déformée d'un ratio d'aspect  $\chi_0$ . Cette fois, le demi-axe  $a$  est dirigé suivant l'axe  $x$ , mais cela ne change

strictement rien au modèle présenté à la section 4.2.2.

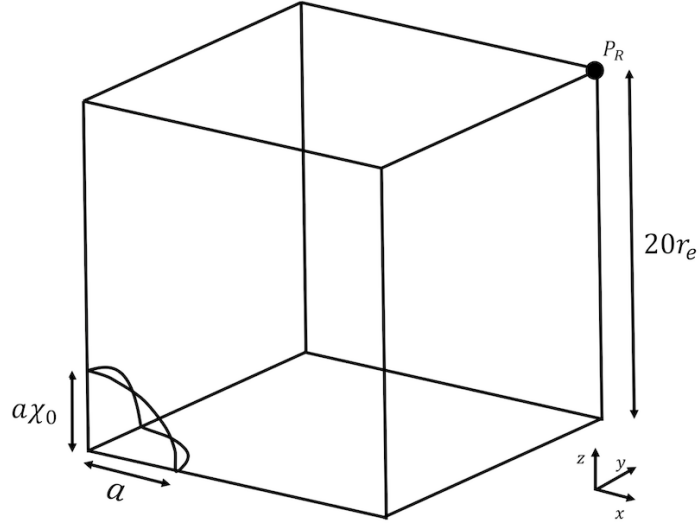


Figure 4.7 Géométrie du cas de validation portant sur l'oscillation de la bulle

Des conditions de symétrie sont placées aux frontières qui sont en contact avec la bulle tandis que des conditions de vitesse et déplacement nulle sont placées sur les autres frontières du domaine. Une pression de référence nulle est appliquée au point  $P_R$ .

### Analyse dimensionnelle

Les paramètres qui déterminent le problème d'oscillation de la bulle sont :

$$\rho_c, \quad \rho_d, \quad \mu_c, \quad \mu_d, \quad \chi_0, \quad \gamma, \quad d_e, \quad \text{et} \quad t \quad (4.38)$$

Considérant que  $\chi_0$  est déjà adimensionnel, on doit définir 4 nombres adimensionnels afin de caractériser le problème. Leurs expressions sont présentées au tableau 4.4.  $\rho^*$  et  $\mu^*$  désignent les ratios de densité et de viscosité respectivement.  $Oh$  est le nombre d'Ohnesorge qui représente le ratio des forces visqueuses par rapport aux forces de tension superficielle et inertielle. Finalement,  $t^*$  représente le temps adimensionnel.

Pour être plus intuitif, on présentera plutôt la déformation temporelle comme étant le ratio du demi-axe polaire  $a$  sur le rayon équivalent  $r_e$ . Celui-ci s'obtient comme suit :

$$\chi^{-2/3} = \frac{a}{r_e} = \bar{a} \quad (4.39)$$

Tableau 4.4 Nombres adimensionnels caractérisant le problème d'oscillation de la bulle

Nombre adimensionnel	Expression
$\rho^*$	$\frac{\rho_d}{\rho_c}$
$\mu^*$	$\frac{\mu_d}{\mu_c}$
$Oh$	$\frac{\mu_c}{\sqrt{\rho_c \gamma d_e}}$
$t^*$	$t \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_c d_e^3}}$

### Modèle linéaire (Lamb, 1945)

La solution analytique à l'oscillation d'une bulle la plus populaire est probablement la solution linéaire proposée par Lamb (1945). Celui-ci présente la surface instantanée à l'aide des harmoniques de surface présentées précédemment comme suit :

$$r(t, \theta, \varphi) = r_0 + \sum_n S_n \sin(\omega_n t + \epsilon) \quad (4.40)$$

où  $r_0$  est le rayon moyen de la bulle et  $S_n$  est l'harmonique de mode  $n$ . On peut supposer que le rayon  $r_0$  est égal au rayon équivalent  $r_e$ . La linéarisation de l'énergie cinétique calculée à partir de l'écoulement potentiel et de l'énergie potentiel issue de la surface d'un sphéroïde mène à la relation suivante :

$$\omega_n^2 = n(n+1)(n-1)(n+2) \frac{\gamma}{[(n+1)\rho_c + n\rho_d] r_e^3} \quad (4.41)$$

Pour le mode  $n = 2$ , qui est le mode principal d'un sphéroïde, la relation devient :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{24\gamma}{(3\rho_c + 2\rho_d)r_e^3}} \quad (4.42)$$

Et sous forme adimensionnelle :

$$\omega_2 t = \sqrt{1 + \frac{2\rho^*}{3}} t^* \quad (4.43)$$

Lamb (1945) utilise également les effort visqueux à l'extérieur de la bulle afin de développer une relation pour le facteur de relaxation :

$$\zeta_n = \frac{(n+2)(2n+1)\nu_c}{\omega_n r_e^2} \quad (4.44)$$

Pour  $n = 2$ , on a

$$\zeta_2 = \frac{20\nu_c}{\omega_2 r_e^2} \quad (4.45)$$

Et sous forme adimensionnelle :

$$\zeta_2 = 10Oh\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2\rho^*}{3}} \quad (4.46)$$

### Modèle non-linéaire

Dans le cas de l'oscillation de la bulle, il n'y a pas de mode de translation (c.-à-d.  $\dot{z} = 0$ ). Le modèle présenté à la section 4.2.2 s'écrit alors :

$$\rho_c V_e C_{ma} \ddot{a} = -\frac{1}{2} \rho_c A_e (C_{Da} + C_{Maa}) \dot{a}^2 + F_\gamma \quad (4.47)$$

### Résultats

Les simulations ont été effectuées sur deux maillages de tailles différentes. Les éléments du maillage sont raffinés suivant une fonction de distance du centre de la bulle avec un seuil pour définir la taille locale (voir figure 4.8). Les deux tailles caractéristiques  $l_c$  sont  $r_e/8$  et  $r_e/16$ . Elles représentent les maillages grossier et fin respectivement. Ces maillages sont présentés à la figure 4.9. Dans les deux cas, la géométrie est la même et le rayon  $r_e$  est de 0.5m.

Les deux fluides sont fictifs et leurs propriétés sont présentées à la table 4.5. La tension superficielle  $\gamma$  est de 5 N/m. On obtient alors un ratio de densité  $\rho^*$  de 0.001, un ratio de viscosité  $\mu^*$  de 0.01 et  $Oh = 4.46 \times 10^{-4}$ .

Tableau 4.5 Propriétés des fluides pour la cas de l'oscillation d'une bulle

	Fluide continue	Fluide dispersée
$\rho(kg/m^3)$	1.0	0.001
$\mu(Pa \cdot s)$	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-5}$

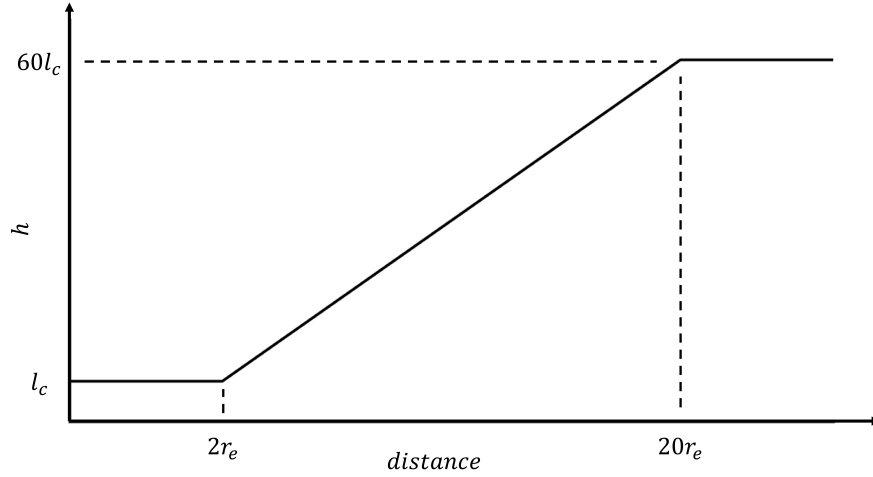


Figure 4.8 Fonction de raffinement du maillage. Taille de maillage en fonction de la distance du centre de la bulle.

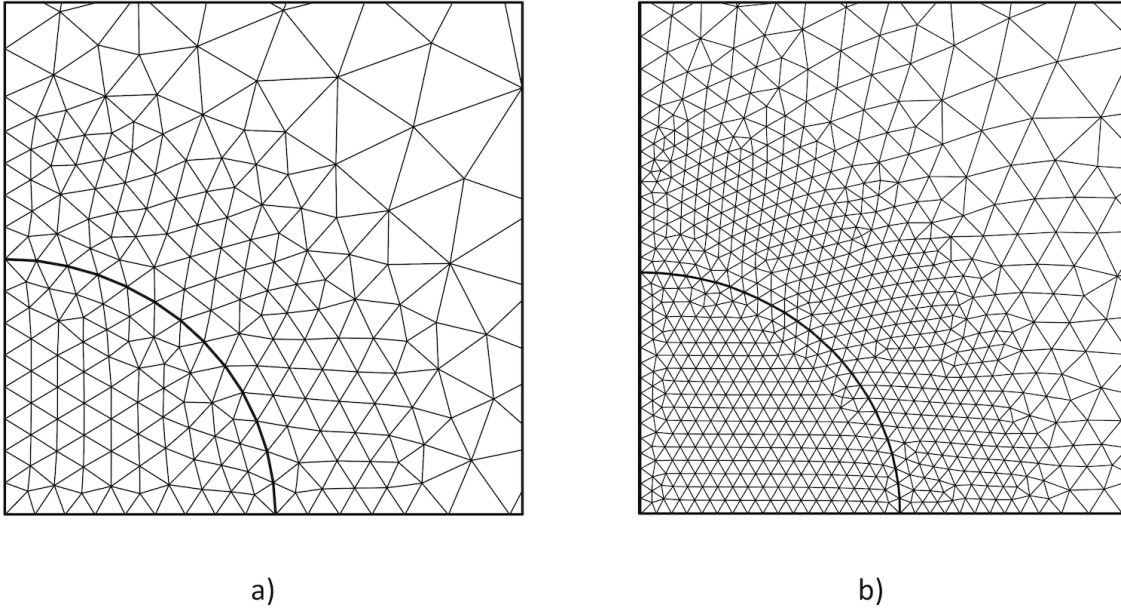


Figure 4.9 Portion du maillage de la bulle dans le plan XZ. a) Maillage grossier ( $l_c = r_e/8$ ). b) Maillage fin  $l_c = r_e/16$ .

Les 4 simulations ont été effectuées sur une machine de bureau à 8 coeurs. Elles ont duré  $\sim 3$ h pour le maillage grossier et  $\sim 15$ h pour le maillage fin. Les nombres d'équations sont de 13 745 et 74 787 respectivement.

Les résultats en terme de fréquence angulaire  $\omega$  et d'amortissement  $\zeta$  sont présentés dans le tableau 4.6. On y présente aussi une estimation de l'erreur calculée à partir de la solution de Lamb (1945) pour le mode 2. On détermine les valeurs  $\omega$  et  $\zeta$  à l'aide de la fonction *fminsearch* de MATLAB en minimisant l'écart avec l'équation suivante :

$$a(t) = a_0 \cos(\omega \sqrt{\zeta^2 - 1} t) e^{-\omega \zeta t} \quad (4.48)$$

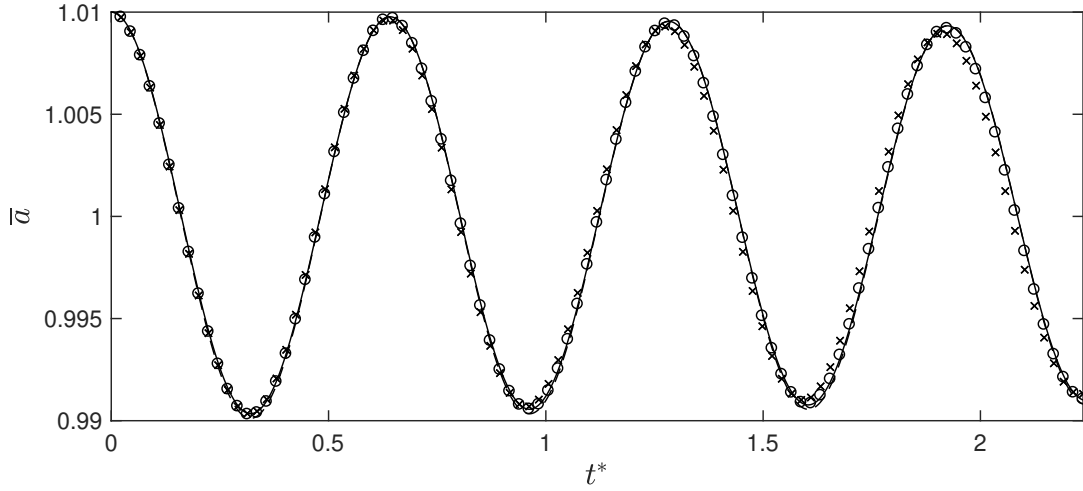
On peut voir que l'erreur sur la fréquence angulaire est très faible pour l'ensemble des simulations. Cependant, ce n'est pas le cas pour l'amortissement. En effet, des erreurs relatives allant jusqu'à 159% sont observées

Tableau 4.6 Résultats de la simulation de l'oscillation de la bulle

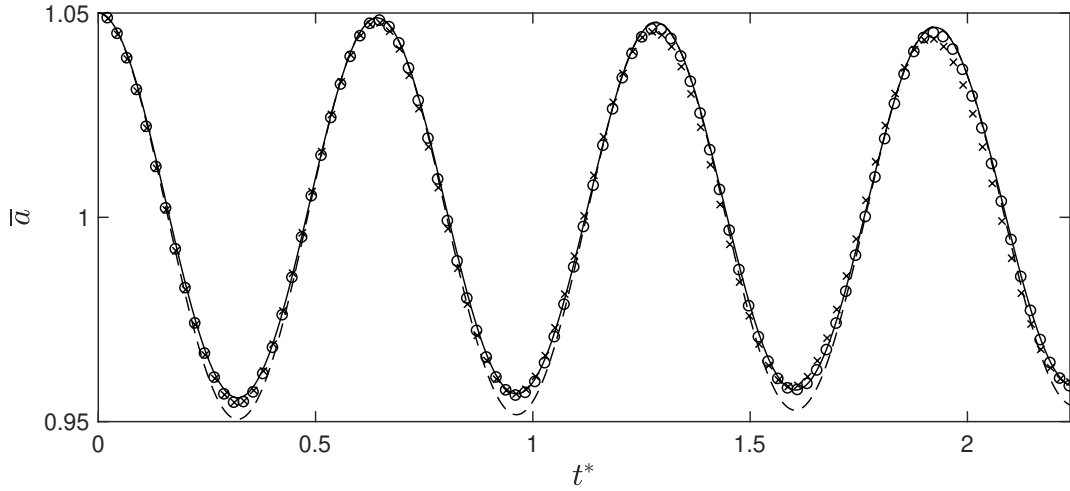
Déf. initiale	$l_c$	$\omega(rad/s)$	$\varepsilon_\omega(\%)$	$\zeta(\%)$	$\varepsilon_\zeta(\%)$
1 %	$r_e/8$	22.04	0.694	0.623	70.5
	$r_e/16$	21.93	0.149	0.494	35.2
5 %	$r_e/8$	21.99	0.438	0.948	159
	$r_e/16$	21.87	0.097	0.809	121

La figure 4.10 présente les amplitudes d'oscillation relatives  $\bar{a}$  sur plus de 3 périodes. On y présente également les résultats des modèles linéaire de Lamb et non-linéaire (4.47). On remarque, en effet, que les fréquences sont très bien approximées par le modèle linéaire, mais aussi par le modèle non-linéaire. Dans le cas d'une déformation initiale de 1%, on peut observer que l'écart entre les deux modèles est faible et que nos résultats sont semblables à ces deux modèles. Dans le cas d'une déformation initiale de 5%, les effets non-linéaires sont plus facilement observables. C'est pourquoi nos résultats se rapprochent plus du modèle non-linéaire. En effet, on remarque que l'amplitude en compression est différente de celle en expansion, ceci est un effet de la force de Meshchersky. Cette asymétrie de l'amplitude explique également pourquoi l'amortissement calculée à l'aide de la relation (4.48) était si mal approximé.

L'effet de la force Meshchersky sur l'oscillation d'une bulle est un sujet qui a été abordé dans le mémoire de Pelletier (2014). On y voit d'ailleurs que, dans le cas où la masse est variable, la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique n'est pas constante. La force de Meshchersky effectue donc un travail afin de stabiliser le bilan d'énergie. Ce travail est nul sur une période d'oscillation. À notre connaissance, il s'agit de la première fois qu'un modèle numérique d'écoulement de Navier-Stokes diphasique capture aussi visiblement ces effets.



(a) Déformation initiale de 1%



(b) Déformation initiale de 5%

Figure 4.10 Amplitude de l'oscillation  $\bar{a}$  en fonction du temps adimensionnel. (--) représente la solution linéaire de Lamb (1945). (—) représente la solution non-linéaire. (×) sont les résultats du maillage grossier et (o) sont les résultats du maillage fin.

La figure 4.11 permet d'apprécier d'avantage l'effet de la force de Meshchersky. On y présente deux simulations effectuées à l'aide du modèle (sans la force de dissipation). L'une de ces simulations tient compte de la force de Meshchersky et l'autre non.

La figure 4.12 présente l'évolution de l'erreur relative sur le volume par rapport au volume initiale de la bulle. On peut voir que l'erreur demeure très faible ( $< 1.8 \times 10^{-6}$ ) tout au long de la simulation. Ceci confirme donc que la masse est correctement conservée.

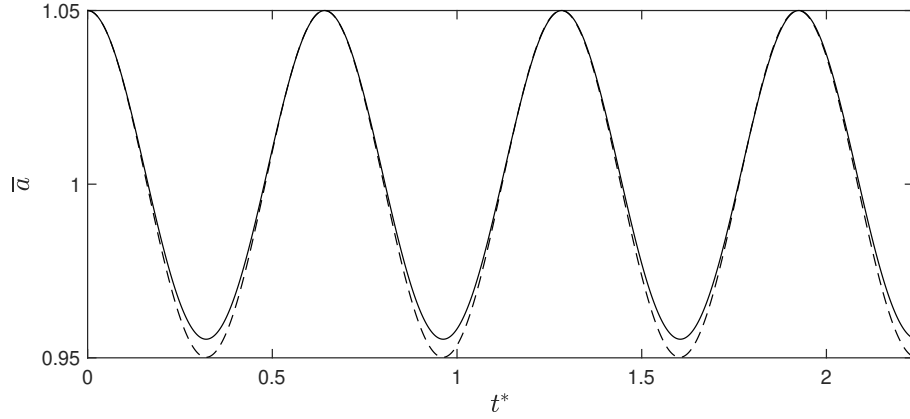


Figure 4.11 Amplitude d'oscillation d'une bulle. (- -) Sans la force de Meshchersky. (-) Avec la force de Meshchersky.

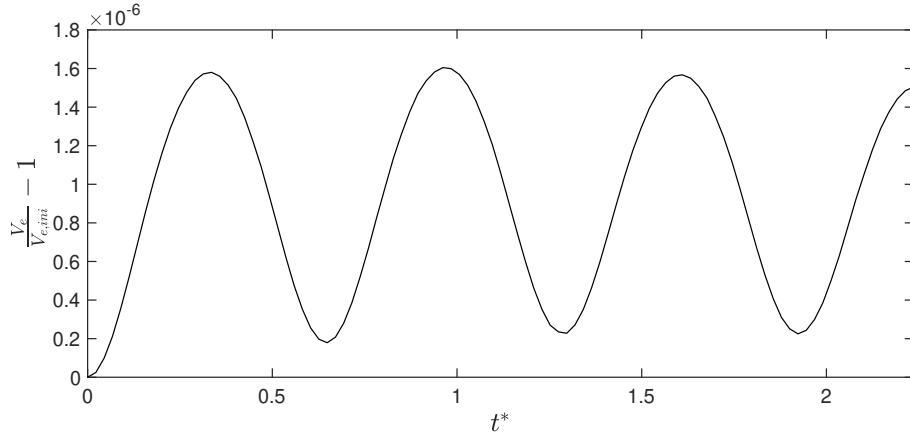


Figure 4.12 Erreur numérique relative sur le volume par rapport au volume initiale en fonction du temps adimensionnel.

### 4.3.2 Ascension de la bulle

La simulation de l'ascension d'une bulle est un autre cas régulièrement utilisé pour la validation des modèles de résolution des méthodes diphasiques (voir Annaland et al. (2006), Bonometti and Magnaudet (2007), Hua et al. (2008) et Amaya-Bower and Lee (2010)). Il consiste à simuler la montée d'une bulle à partir d'une solution initiale nulle jusqu'à la solution stationnaire et de comparer les résultats avec des corrélations existantes. Il s'agit d'un excellent cas de validation puisqu'il se rapproche fortement de l'application prévue de l'outil. De plus, plusieurs corrélations vigoureusement validées nous permettent de comparer nos résultats.



Nous nous concentrerons sur les bulles en régimes sphérique et ellipsoïdal puisque, pour ce type bulle, la déformation de l'interface (et donc, du maillage) demeure assez faible. Il s'agit également des régimes pour lesquels les corrélations ont été le plus étudiées.

La figure 4.13 présente la géométrie initiale du problème. On y voit aussi la zone de raffinement du maillage qui englobe la bulle. À l'intérieur de celle-ci, le maillage à une taille constante  $l_c$ . À l'extérieur, la taille décroît linéairement de manière à atteindre une taille de  $80l_c$  aux frontières extérieures du domaine.

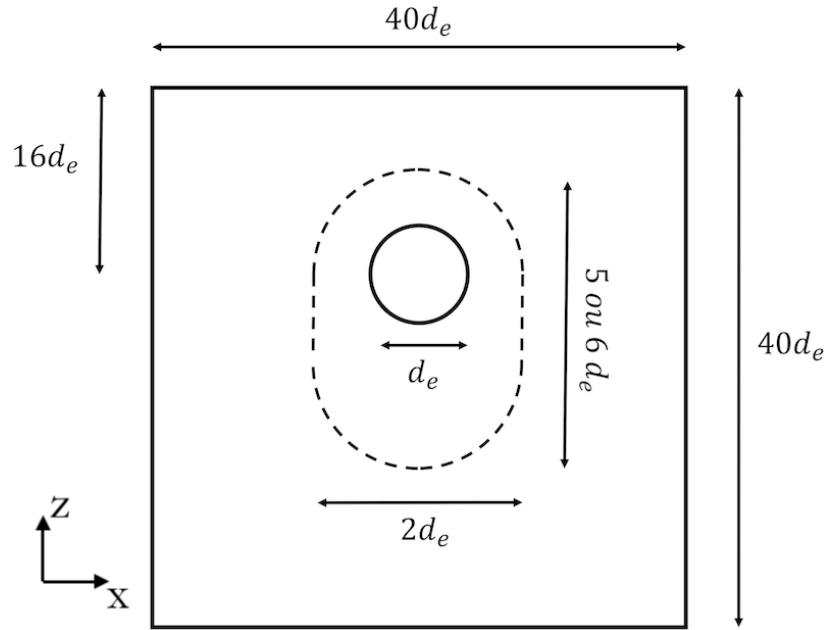


Figure 4.13 Vue en plan ( $xz$ ) de la géométrie du cas de validation portant sur l'ascension de la bulle.

Puisque les simulations sont effectuées dans le repère absolu, les vitesses imposées sur les parois extérieures sont nulles. Également sur les parois extérieures, le déplacement du maillage dans la direction  $z$  est libéré. De cette manière, le maillage suit la montée de la bulle. Les autres coordonnées sont fixées à 0. Finalement, une pression de référence nulle est imposée sur un point au sommet du domaine.

## Analyse dimensionnelle

Les paramètres qui déterminent le problème d'ascension de la bulle sont :

$$\rho_c, \quad \rho_d, \quad \mu_c, \quad \mu_d, \quad g, \quad \gamma, \quad d_e, \quad \text{et} \quad t \quad (4.49)$$

5 nombres adimensionnels sont donc nécessaires afin de caractériser le problème. Leurs expressions sont présentées au tableau 4.7.  $\rho^*$  et  $\mu^*$  désignent les ratios de densité et de viscosité respectivement.  $EO$  est le nombre d'Eötvös (aussi appelé nombre de Bond) qui représente le ratio des forces capillaires par rapport aux forces gravitationnelles.  $M$  est le nombre de Morton qui est régulièrement utilisé aux côtés de nombre d'Eötvös afin de caractériser une bulle. Le nombre de Morton est défini uniquement par les propriétés des fluides. Dans le cas de l'eau et de l'air, on obtient  $M_{eau/air} = 2.6251 \times 10^{-11}$ . Finalement,  $t^*$  représente le temps adimensionnel.

Tableau 4.7 Nombres adimensionnels caractérisant un problème d'ascension d'une bulle

Nombre adimensionnel	Expression
$\rho^*$	$\frac{\rho_d}{\rho_c}$
$\mu^*$	$\frac{\mu_d}{\mu_c}$
$EO$	$\frac{\Delta\rho g d_e^2}{\gamma}$
$M$	$\frac{g \mu_c^4 \Delta\rho}{\rho_c^2 \gamma^3}$
$t^*$	$t \sqrt{\frac{g}{d_e}}$

Le résultat du problème est la vitesse de la bulle. On peut également l'adimensionner comme suit :

$$U^* = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\sqrt{g d_e}} \quad (4.50)$$

On définit également le nombre de Reynolds  $Re$  afin de caractériser l'écoulement autour de la bulle :

$$Re = \frac{\rho_c d_e \|\mathbf{u}\|}{\mu_c} \quad (4.51)$$

et le nombre de Weber :

$$We = \frac{\rho_c \|\mathbf{u}\| d_e}{\gamma} \quad (4.52)$$

### Analyse de convergence

Chaque dimension du domaine a été modifiée individuellement et une simulation test a été effectuée afin de s'assurer que la solution ne dépende que de la taille  $l_c$ . Maintenant, on doit choisir cette taille pour l'ensemble des simulations à venir. Pour ce faire, 4 simulations avec des maillages de tailles  $l_c$  différentes ont été effectuées. Les tailles sont  $l_c = d_e/6$ ,  $d_e/8$ ,  $d_e/9$  et  $d_e/10$  avec  $d_e = 1.7\text{mm}$  et les nombres de noeuds respectifs sont 9 442, 31 988, 44 538 et 60 392. Les propriétés de la simulation correspondent à :

$$\rho^* = 1.225 \times 10^{-3}, \quad \mu^* = 1.8 \times 10^{-2}, \quad Eo = 0.1291 \quad \text{et} \quad M = 2.6251 \times 10^{-11} \quad (4.53)$$

La figure 4.14 présente une comparaison de la vitesse d'ascension pour l'ensemble des simulations. On voit que la solution semble converger vers une certaine valeur. Dans le cas idéal, on aurait aimé utiliser le maillage le plus fin. Cependant, celui-ci donne lieu à des simulations bien trop longues. On utilisera alors le maillage dont la taille caractéristique est  $l_c = d_e/9$ .

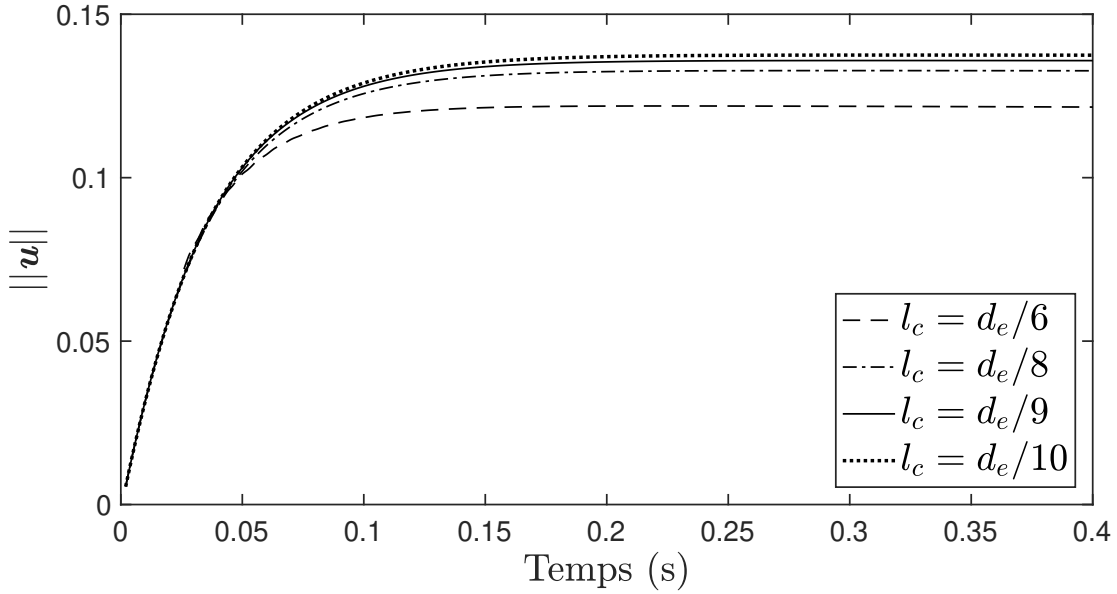


Figure 4.14 Vitesse de la bulle en fonction du temps pour 4 tailles caractéristiques différentes.

La figure 4.15 présente l'erreur sur la vitesse terminale en fonction de la taille caractéristique  $l_c$ . L'erreur est calculée à l'aide de la vitesse terminale prédite par les relations (4.29) et (4.34). La convergence théorique des éléments P1-P1 est linéaire, mais on observe une convergence qui se situe entre l'ordre 2 et l'ordre 3. On a alors une super-convergence.

### Présentation des simulations

Deux séries de simulation sont effectuées : une dimensionnelle et une adimensionnelle. Les simulations dimensionnelles comportent 9 cas qui se situent entre  $Eu = 0.01$  et  $Eu = 0.5994$ . La géométrie est identique pour l'ensemble des cas et elle se base sur un diamètre de  $d_e = 1.7\text{mm}$ . Il s'agit d'un diamètre réaliste pour une bulle d'air dans de l'eau, c'est pourquoi on catégorise ces cas comme étant dimensionnels. De plus, les densités et viscosité sont égales à celle de l'eau et de l'air. On varie  $Eu$  en modifiant  $g$  et  $\gamma$ . On s'assure également de conserver  $M_{eau/air} = 2.6251 \times 10^{-11}$  en gardant le ratio  $g/\gamma^3$  constant. L'ensemble des paramètres pour les cas dimensionnels sont présentés dans le tableau 4.8. On y présente aussi  $d_{eau/air}$ , le diamètre équivalent d'une bulle eau/air.

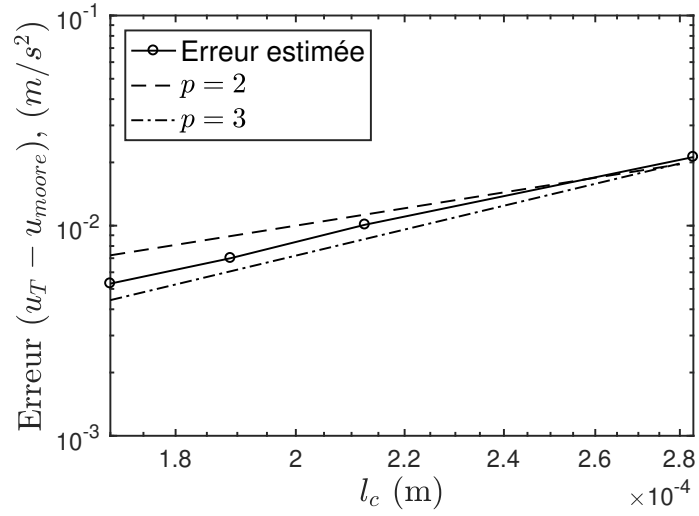


Figure 4.15 Convergence de l'erreur estimée sur la vitesse en fonction du maillage.

Tableau 4.8 Propriétés des simulation dimensionnels

$Eo$	$g(\text{m/s}^2)$	$\gamma(\text{N/m})$	$d_{eau/air}(\text{mm})$
0.0100	0.0400	0.0115	0.271
0.0167	0.0858	0.0148	0.350
0.0279	0.1844	0.0191	0.453
0.0465	0.3976	0.0247	0.585
0.0775	0.8565	0.0319	0.755
0.1291	1.8472	0.0413	0.974
0.2153	3.9763	0.0533	1.26
0.3594	8.5700	0.0688	1.63
0.5994	18.4622	0.0889	2.10

Les simulations adimensionnelles proposent également 9 cas, mais cette fois sur une géométrie de  $d_e = 1\text{m}$ . Les densités sont de  $\rho_c = 1\text{kg/m}^3$  et  $\rho_d = 1.225 \times 10^{-3}\text{kg/m}^3$  et les viscosités sont de  $\mu_c = 1 \times 10^{-2}\text{Pa} \cdot \text{s}$  et  $\mu_d = 1.8 \times 10^{-4}\text{Pa} \cdot \text{s}$ . Les ratios  $\rho^*$  et  $\mu^*$  sont alors conservés. On varie  $Eo$  de la même manière que les cas dimensionnels en conservant, encore une fois,  $M$  constant et équivalent au cas eau/air. Le  $Eo$  varie entre 0.0552 et 0.5091 de manière à obtenir 2 cas adimensionnels entre chaque cas dimensionnel.

L'objectif principal des simulations adimensionnelles est de réduire l'écart entre l'ordre de

Tableau 4.9 Propriétés des simulations adimensionnels

$Eo$	$g(\text{m/s}^2)$	$\gamma(\text{N/m})$	$d_{eau/air}(\text{mm})$
0.0552	0.253	4.584	0.637
0.0655	0.327	4.993	0.694
0.0921	0.546	5.924	0.823
0.1093	0.706	6.452	0.896
0.1539	1.179	7.655	1.06
0.1825	1.524	8.338	1.16
0.2569	2.545	9.893	1.37
0.3048	3.289	10.776	1.50
0.4291	5.492	12.785	1.78
0.5091	7.098	13.926	1.93

grandeur des propriétés afin de mieux conditionner le système matriciel et ainsi améliorer la résolution. Ceci devrait se traduire en une réduction du temps de calcul. Cependant, ce n'est pas ce qui a été observé en pratique. Il est possible que les ordres de grandeur soient encore trop écartés, mais il est difficile de faire mieux. Toujours sur un ordinateur de bureau à 8 coeurs, les simulations peuvent durer entre 2 jours (pour un cas à  $Eo$  faible) et 3 semaines (cas instable à  $Eo$  élevé).

## Comparaison avec les relations

Cette section présente la comparaison des résultats obtenues aux relations connues de la littérature. Celles-ci ont été présentées à la section 4.2.2. On verra une comparaison du coefficient de traînée  $C_D$  et de la déformation de la bulle  $\chi$  en fonction de  $We$ . On transportera par la suite nos résultats au cas d'une bulle d'air dans l'eau afin de comparer la vitesse d'ascension en fonction du diamètre de la bulle.

La figure 4.16 présente le coefficient de traînée en fonction du nombre d'Eötvös. Nos résultats sont comparés avec la relation (4.27) de Mei et al. (1994) pour les bulles de faible  $Eo$  et la relation (4.29) de Moore (1965) pour les bulles avec un  $Eo$  plus élevé. Le coefficient de traînée de Moore (1965) est également combiné avec les relations (4.34) de Moore (1965) et (4.36) de Legendre et al. (2012) afin de prédire la déformation. Le coefficient de traînée provenant de nos simulations est calculé à l'aide des forces obtenues par la méthode des réactions. On voit que les résultats concordent presque parfaitement avec les relations de la littérature. On peut aussi remarquer que le coefficient de traînée obtenu avec la relation de Moore (1965) semble se rapprocher davantage à nos résultats qu'avec la relation de Legendre et al. (2012).

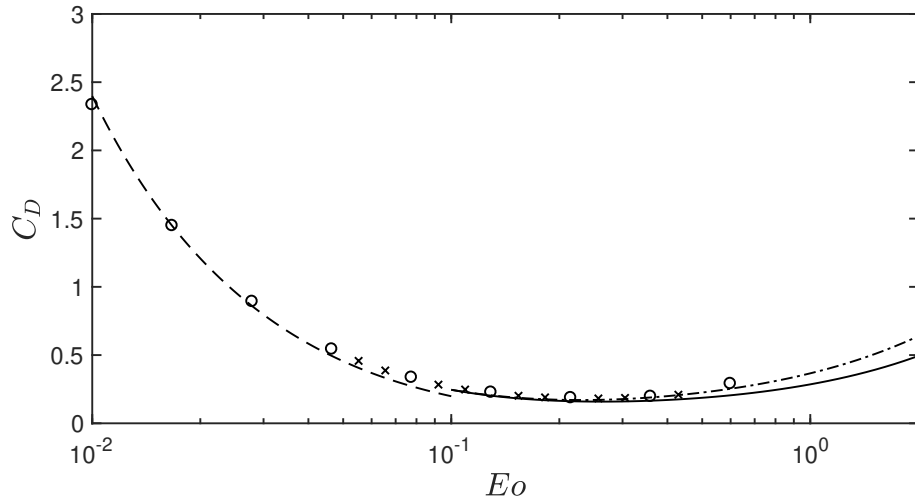


Figure 4.16 Comparaison des résultats : Coefficient de traînée  $C_D$  en fonction du Eötvös. (o) Résultats dimensionnels. (x) Résultats adimensionnels. (- -) Relation (4.27) de Mei et al. (1994). (-.) Relation (4.29) de Moore (1965). (-) Relation (4.29) de Moore (1965) avec prédiction de  $\chi$  de Legendre et al. (2012).

La figure 4.17 présente la déformation de la bulle  $\chi$  en fonction de  $We$ . Les résultats sont comparés avec les relations (4.33), (4.34) et (4.36). On remarque que les résultats semblent suivre la relation (4.36). Cette observation est contradictoire avec la précédente.

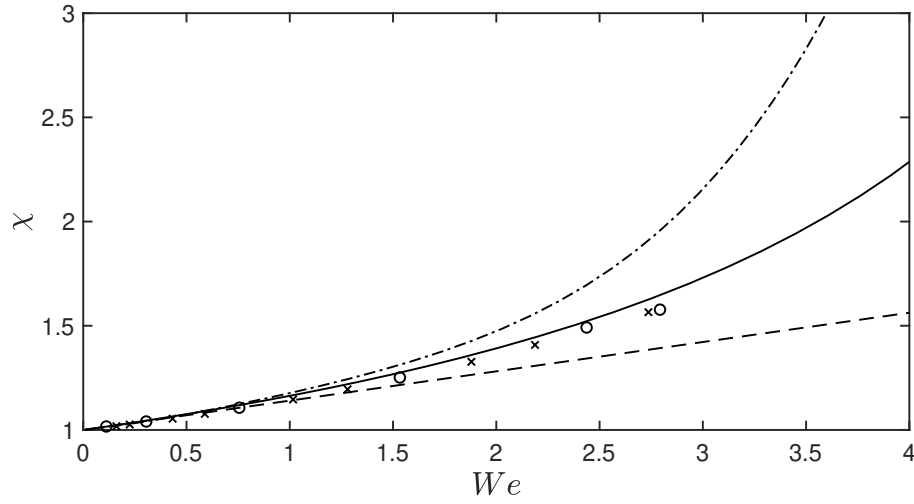


Figure 4.17 Comparaison des résultats : Déformation de la bulle  $\chi$  en fonction de  $We$ . ( $\circ$ ) Résultats dimensionnels. ( $\times$ ) Résultats adimensionnels. (- -) Relation (4.33) de Moore (1963). (-.) Relation (4.34) de Moore (1965). (-) Relation (4.36) de Legendre et al. (2012).

Finalement, on redimensionnalise nos simulations afin de reproduire un cas de bulle d'air dans de l'eau. On peut ainsi comparer nos résultats avec les expériences effectuées par Duineveld (1995). La figure 4.18 présente les résultats dimensionnels en terme de vitesse terminale d'ascension en fonction de diamètre équivalent de la bulle. On compare les résultats avec les vitesses prédites par les relations de coefficient de traînée et les mesures expérimentales de Duineveld (1995). On remarque que, tout comme pour le coefficient de traînée  $C_D$ , on s'approche très bien des prédictions de Mei et al. (1994) et Moore (1965). Cependant, on n'atteint pas les mêmes valeurs que Duineveld (1995) pour des diamètres  $d_e > 1$ .

Duineveld (1995) a observé des instabilités pour des bulles de rayon supérieur à 0.91 mm qui correspond à un Reynolds de 660. Ces instabilités se manifestent par un changement de la trajectoire passant de rectiligne à zigzag. Dans nos simulations, des trajectoires zigzag, mais également hélicoïdales ont été observés dès les simulations à  $Eo = 0.4291$  qui correspond à  $Re = 590$ . Il a été montré que le mouvement instable de la bulle est fortement couplé à l'instabilité du sillage. Cependant, aucune étude théorique ou numérique n'a encore été faite (Magnaudet and Eames, 2000). Il pourrait alors être intéressant d'étudier cette relation.



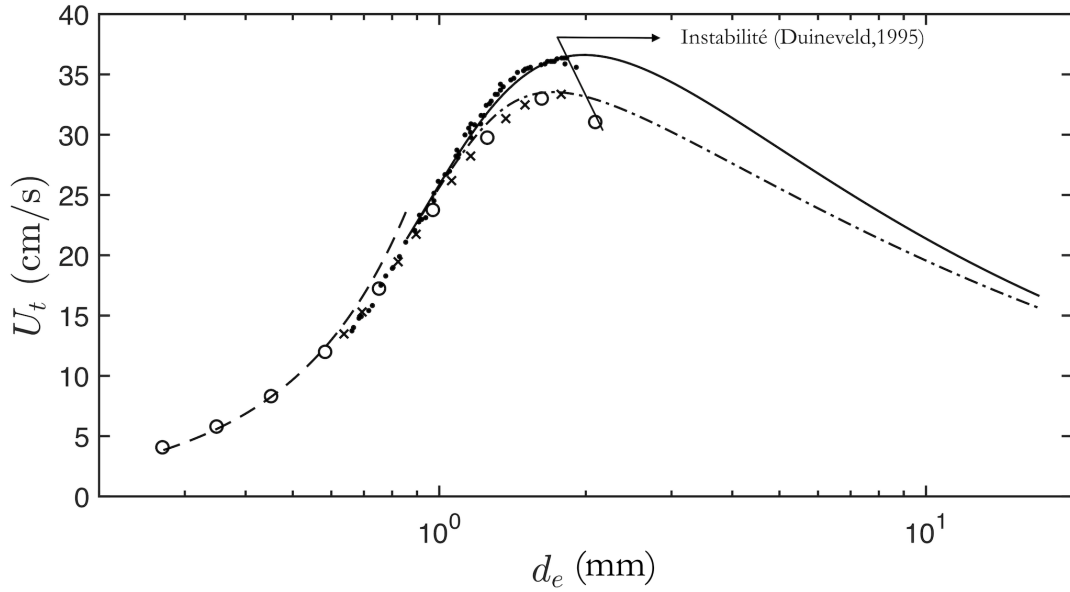


Figure 4.18 Comparaison des résultats : Vitesse terminale d'une bulle d'air dans l'eau en fonction de son diamètre équivalent. ( $\circ$ ) Résultats dimensionnels. ( $\times$ ) Résultats adimensionnels. ( $\cdot$ ) Mesures de Duineveld (1995). (---) Relation (4.27) de Mei et al. (1994). (-.) Relation (4.29) de Moore (1965). (-) Relation (4.29) de Moore (1965) avec prédiction de  $\chi$  de Legendre et al. (2012).

### Comparaison avec le modèle

En ascension, tous les termes de l'équation (4.19) sont activés. Afin de déterminer le coefficient de compression  $C_C$  on utilise les relations (4.34) et (4.36). Celles-ci nous permet de prédire la valeur de  $\chi$  qui sera utilisée dans l'équilibre entre la force de tension superficielle et la force de compression ( $F_\gamma = F_C$ ).

La figure 4.19 présente une comparaison entre une solution de CADYF ( $Eu = 0.3594$ ) et le modèle (combiné avec les deux différentes relations afin de prédiction de  $\chi$ ). En termes de vitesse terminale, la comparaison suit les observations faites précédemment. En effet, la vitesse terminale se compare bien à celle prédite par le modèle utilisant la relation (4.34) de Moore (1965). Ceci n'est pas surprenant puisque, à l'état d'équilibre, les forces actives du modèle utilisent les mêmes relations présentées précédemment. On obtient donc les mêmes conclusions. Ce qui est intéressant de voir se situe dans la période transitoire où la solution de CADYF est identique à la prédiction des deux modèles.

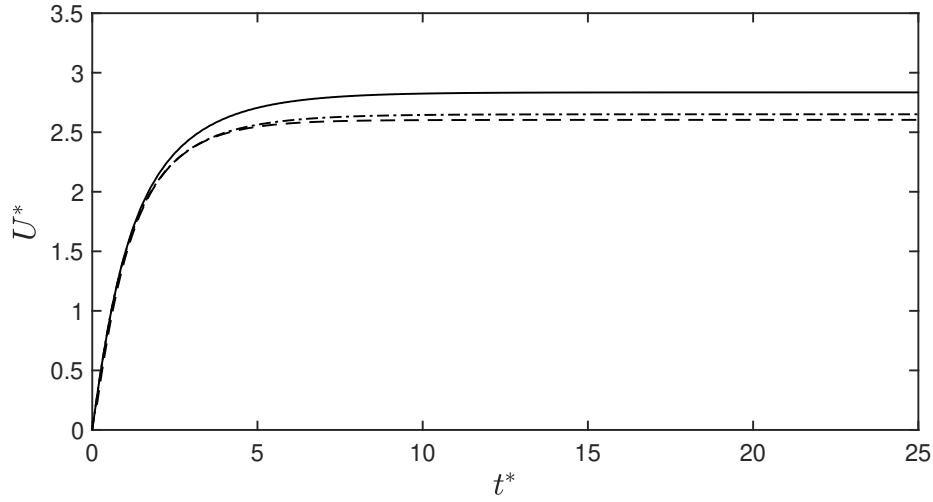


Figure 4.19 Comparaison avec le modèle : Vitesse adimensionnelle de la bulle en fonction du temps adimensionnel. (- -) Résultats de CADYF. (-·-) Modèle combiné avec la relation (4.34) de Moore (1965). (-) Modèle combiné avec la relation (4.36) de Legendre et al. (2012).

## Conclusion

Au total, 18 simulations d'ascension ont été effectuées. Les solutions ont ensuite été comparées à des relations provenant de la littérature ainsi qu'un modèle à deux degrés de liberté. Les résultats montrent une bonne comparaison pour l'ensemble des données. En effet, les vitesses terminales et les coefficients de traînée montrent une excellente correspondance avec les relations de Moore (1965). Cependant, il ne pourrait s'agir que d'une coïncidence. Les travaux expérimentaux de Duineveld (1995) ont démontré que la relation (4.34) semblait surestimer la déformation. C'est également ce qu'a montré nos résultats. On devrait donc obtenir des vitesses terminales et des coefficients de traînée comparables à ceux prédits par la relation de Moore (1965), mais combinée à la relation (4.36) de Legendre et al. (2012). Une cause possible de cet écart pourrait être le maillage de la solution. En effet, l'étude de convergence effectuée précédemment utilisait un modèle situé à  $Eo = 0.1291$ . Cependant, nos études vont au-delà de cette valeur ce qui pourrait alors dire que nos solutions sont plus loin que prévu de la solution convergée. Malheureusement, il nous est impossible d'effectuer des simulations avec un maillage plus fin avec les ressources actuelles. En somme, les résultats sont tout de même plus que satisfaisants considérant la difficulté du problème à résoudre.

## CHAPITRE 5 APPLICATION : ÉTUDE DES BULLES ÉLLIPSOÏDALES

Ce chapitre présente l'étude de la dispersion de la vitesse d'ascension de bulles du régime ellipsoïdal que l'on croit être reliée à un phénomène de bistabilité. On passe d'abord en revue quelques études portant sur l'ascension de la bulle qui mène à croire que le comportement de celle-ci pourrait être une bistabilité. On présente ensuite l'étude numérique de bulles ellipsoïdales qui a été effectuée. Finalement, on conclut ce sujet à la lumière nos observations.

### 5.1 Historique des observations

Avant le début des années 2000, la dispersion de la vitesse de montée des bulles ellipsoïdales était entièrement attribuée à la contamination de l'eau. Ce n'est qu'après les travaux de Wu and Gharib (2002) et Tomiyama et al. (2002) qu'on a supposé autrement. Les deux études ont été effectuées dans de l'eau pure, mais en observant autant des bulles lentes que rapides. Le type de bulle (lente ou rapide) semblait plutôt être associé au mode d'injection de l'air dans le réservoir d'eau. Wu and Gharib (2002) ont observé que, si la seringue d'injection avait un diamètre plus faible que celui de la bulle injectée, la bulle était relâchée avec une forme initiale largement déformée et allait monter rapidement avec une déformation importante ( $\chi$  faible). À l'inverse, si le diamètre de la seringue était égal ou plus élevé que le diamètre de la bulle, celle-ci allait être injectée avec une forme sphérique et allait monter lentement tout en gardant sa forme initiale ( $\chi \sim 1$ ). Tomiyama et al. (2002) sont arrivés aux mêmes conclusions. Cependant, ils ont ajouté que, dans le cas le l'eau contaminée, les surfactants semblaient forcer la forme sphérique, et ce, peu importe la forme initiale de la bulle.

Peu après, Yang et al. (2003) ont tenté, sans succès, de reproduire ces observations avec un modèle numérique axisymétrique. On a alors supposé qu'il s'agissait d'un phénomène tridimensionnel. En effet, la trajectoire des bulles rapides observées par Wu and Gharib (2002) et Tomiyama et al. (2002) était régulièrement zigzag ou hélicoïdale. À ce jour, personne n'a tenté de reproduire ces observations avec un modèle 3D.

Celata et al. (2006) sont probablement les premiers à avoir observé des bulles lentes et rapides dans de l'eau contaminée (eau du robinet). Encore une fois, le type de seringue était ciblé comme le facteur déterminant. Plus tard, Peters and Christian (2012) ont également observé des bulles lentes et rapides dans de l'eau du robinet. Cependant, ils ont utilisé une approche différente. Plutôt que de produire des bulles avec des seringues différentes, ils ont installé un plafond amovible situé juste après l'injection afin d'arrêter la montée de la bulle et attendre

que sa surface soit immobile avant de la relâcher. Cette méthode a produit des bulles lentes de manière consistante. Sans le plafond, des bulles rapides étaient observées à tout coup. Il est intéressant de noter qu’aucune vitesse transitoire n’était observée. Les bulles étaient lentes ou rapides seulement.

L’équipe du Prof. S. Étienne a également observé des bulles rapides et lentes dans de l’eau du robinet lors des travaux de Pelletier et al. (2015). Cette fois, aucune méthode n’a été utilisée dans le but de produire un type de bulle en particulier. C’est alors à ce moment que l’équipe a supposé que le comportement des bulles observées en laboratoire pourrait être lié à un phénomène de bistabilité. Cependant, on ne peut pas vérifier cette hypothèse expérimentalement puisqu’il est impossible d’assurer l’absence complète de contaminants. En effet, l’une des meilleures façons de confirmer cette hypothèse serait d’observer une bulle lente dans un environnement sans surfactants. On utilise donc le modèle numérique développé dans ce projet afin de tenter de produire des bulles lentes.

## 5.2 Étude de bulles ellipsoïdales

L’ensemble des études présentées ci-dessus (à l’exception de Pelletier et al. (2015)) pointent directement le type d’injection comme étant le facteur déterminant sur la vitesse d’ascension de la bulle et sa forme finale. Les études proposent que la forme initiale de surface de la bulle joue un rôle important sur son état stationnaire. Il serait alors intéressant de vérifier si la forme initiale de l’interface a réellement un impact sur sa vitesse terminale.

Il est proposé qu’une bulle initialement sphérique devrait monter lentement et demeurer sphérique. Cependant, nous avons vu à la section 4.3.2 que les bulles, qui étaient initialement sphériques et immobiles, suivaient tout de même les relations de bulles d’air dans de l’eau pure (bulles rapides). À titre comparatif, on peut tout de même effectuer une simulation où la forme initiale est déformée. La surface initiale de la bulle a la forme d’un sphéroïde prolata afin d’imiter le cas où la seringue d’injection a un diamètre plus petit que la bulle. Les simulations sont effectuées dans des conditions similaires à celle de la section 4.3.2. Les fluides sont de l’air dans l’eau et  $d_e = 1.5mm$ .

La figure 5.1 compare la vitesse d’ascension adimensionnelle de la bulle initialement prolata avec une bulle sphérique de même volume. On y remarque que les vitesses terminales sont pratiquement identiques. Le faible écart se situe probablement à l’intérieur de la marge d’erreur de la simulation. La principale différence apparaît dans la phase transitoire où la bulle prolata est soumise à des oscillations (qui sont d’ailleurs mal définies sur la courbe puisque l’échantillonnage de la solution n’est pas assez élevé).

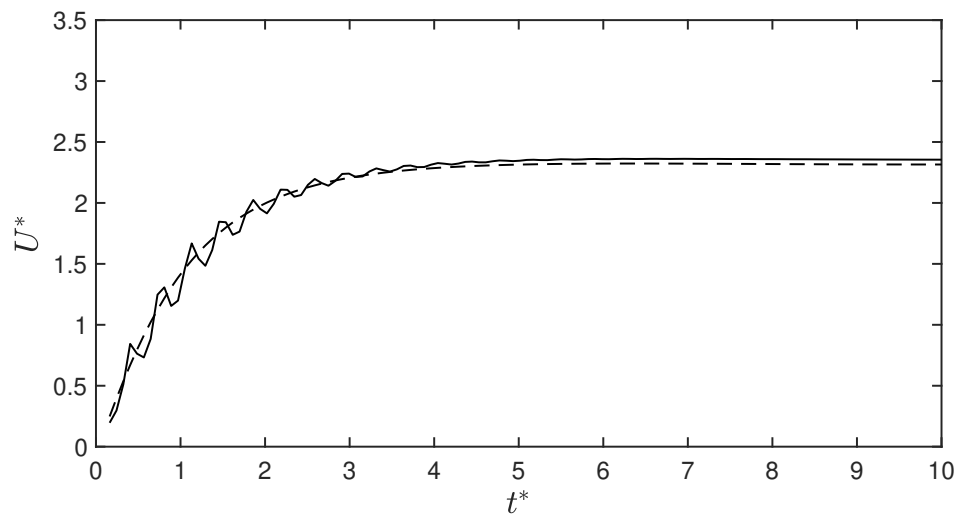


Figure 5.1 Comparaison de la vitesse adimensionnelle de deux bulles de forme initiale différentes. (-) Bulle initialement prolate. (- -) Bulle initialement sphérique.

La figure 5.2 présente la forme des deux bulles sur les premiers instants. On y voit que, même si on est encore dans la période transitoire, les bulles deviennent identiques très rapidement.

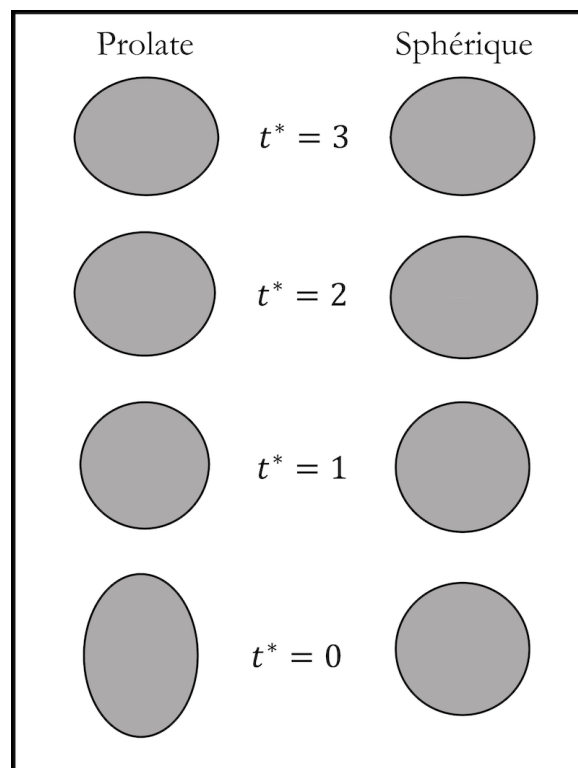


Figure 5.2 Comparaison des bulles prolate et sphérique sur les premiers instants.

D'autres approches ont été tentées pour essayer d'obtenir des bulles lentes. Entre autre, on a lancé une simulation de bulle sphérique avec un écoulement de Stokes (interne et externe) en tant que solution initiale de la vitesse. L'écoulement de Stokes est le seul écoulement dont on connaît la solution analytique. De plus, la solution de l'écoulement de Stokes s'approche davantage de la solution d'une bulle lente que celle d'une bulle rapide. On a également essayé de démarrer la simulation avec une viscosité élevée (afin de réduire l'écoulement interne) et d'augmenter celle-ci graduellement. Malheureusement, dans les deux cas, la solution finale était celle d'une bulle rapide.

Si l'on est incapable d'obtenir une bulle lente dans des conditions de bulle rapide, on peut tout de même tenter d'en obtenir une dans des conditions de bulle lente. Afin d'imiter la contamination de l'eau et de produire des bulles lentes, les numériciens utilisent généralement un modèle de calotte stagnante (voir Fdhila and Duineveld (1996)). On impose alors une condition de non-glissement sur une section inférieure de la bulle afin de reproduire l'effet de la contamination. Dans le logiciel CADYF, il est actuellement impossible de spécifier une condition de non-glissement à l'interface. On utilise alors une méthode plus drastique qui consiste à augmenter la viscosité à l'intérieur de la bulle afin de réduire l'écoulement interne et empêcher la formation de vortex toroïdaux. On reproduit ainsi une condition de non-glissement. Pour ce faire, on utilise le cas de la bulle adimensionnelle à  $Eu = 0.3048$  présenté à la section 4.3.2. Cependant, on augmente la viscosité interne à  $\mu_d = 1.0 Pa \cdot s$ . On obtient alors un ratio de viscosité  $\mu^* = 100$ . Ceci devrait être amplement nécessaire afin de représenter une condition de non-glissement (Béguin et al., 2017).

La figure 5.3 présente le résultat de cette dernière simulation en terme de vitesse adimensionnelle. On remarque que la vitesse terminale est en effet bien plus faible que celle de la bulle rapide qui était de  $U^* = 3.64$ . La vitesse observée se compare plutôt avec la relation d'une sphère solide qui est également présentée sur la figure. De plus, la forme de la bulle demeure sphérique ( $\chi \sim 1.04$ ). On conclue donc qu'il est possible d'imiter, en partie, le comportement d'une bulle lente avec l'outil développé. Cependant, afin de se comparer aux relations existantes pour les bulles lentes, il faudrait implémenter le modèle de calotte stagnante.

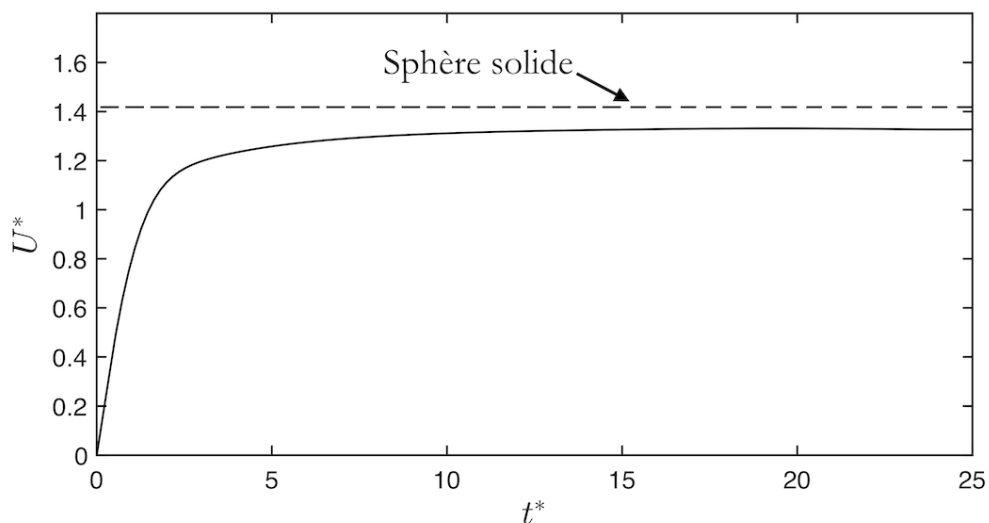


Figure 5.3 Vitesse adimensionnel d'une bulle à  $\mu^* = 100$

### Conclusion sur l'étude de bistabilité

Différentes méthodes ont été tentées afin d'obtenir des bulles lentes dans un système exempt de surfactants. Malgré la capacité de notre outil à reproduire des cas réels d'ascension de bulles incluant la déformation et la vitesse terminale, nous n'avons pu produire une bulle lente sans forcer l'arrêt presque complet de l'écoulement à l'intérieur de la bulle. Les observations expérimentales portent à croire que la forme initiale de la bulle est le facteur déterminant sur le type de bulle qui est relâché. Or, plusieurs simulations ont été effectuées partant d'une bulle sphérique — qui, selon les observations expérimentales, devrait nous donner une bulle lente — mais seulement des bulles rapides ont été observées.

Il est possible que la bistabilité provienne d'un autre mécanisme qui est difficile, ou même impossible, à observer expérimentalement. Des études numériques plus approfondies et plus complètes seraient donc nécessaires. Par exemple, on pourrait modéliser une partie de l'injection, incluant la seringue, afin d'étudier l'impact de la méthode de relâchement de la bulle sur les premiers instants de la solution. Par contre, ce type de simulations demandent de gérer des changements de topologies et, pour l'instant, CADYF n'en fait pas. La gestion des changements de topologies fait cependant partie des travaux en cours au laboratoire.

## CHAPITRE 6 CONCLUSION

Ce chapitre conclue ce mémoire avec, pour commencer, une synthèse des travaux effectuées dans le cadre de ce projet. On parlera ensuite des limitations à la solution proposée et des problèmes mineurs qui ont été rencontrés. Finalement, on effectuera une ouverture sur les possibles améliorations qui permettraient à l'outil développé d'être plus performant.

### 6.1 Synthèse des travaux

L'objectif principal de ce projet de maîtrise était de développer une méthode DNS de résolution des interfaces fluide-fluide pour simuler les écoulements aérés par une bulle en 3D. La méthode devait être la plus précise possible afin de capturer les phénomènes physiques de petite échelle.

La solution développée utilise la formulation Lagrangienne-Eulerienne Arbitraire (ALE) des équations de Navier-Stokes combinée avec la méthode des éléments finis (MEF). La description de l'interface est Lagrangienne permettant ainsi l'application directe des conditions physiques telles que la tension superficielle. L'utilisation de méthodes numériques efficaces telle que l'intégration temporelle adaptative et la résolution monolithique du système d'équations offrent une précision accrue de la solution tout en permettant d'effectuer les simulations sur des ordinateurs de bureau équipés de matériels informatiques destinés au grand public.

Après avoir présenté l'implémentation de la méthode proposée, on a vérifié que celle-ci résolvait comme prévu les équations à l'aide de solutions analytiques simples faisant intervenir les termes importants de la physique des interfaces. On s'est alors assuré que le calcul de la courbure et du saut de pression à travers l'interface s'effectuait correctement. De plus, on a démontré que la convergence des méthodes utilisées était légèrement supérieure à la prédiction théorique.

On a ensuite validé notre méthode en effectuant la simulation de cas réels comme l'oscillation d'une bulle et l'ascension d'une bulle. Dans un premier temps, les simulations d'oscillations ont montré une excellente correspondance avec les modèles théoriques. On a même observé des phénomènes physiques de petite échelle qui n'ont jamais été observés dans des situations semblables auparavant. Par la suite, une série de simulations d'ascension de bulle ont été effectuées et les résultats ont été comparés avec des relations provenant de la littérature. Notre méthode a montré une bonne correspondance avec les relations, mais on croit que l'utilisation d'un maillage plus fin permettrait de se rapprocher davantage des mesures expérimentales.



Finalement, on a étudié la dispersion de la vitesse terminale des bulles ellipsoïdales que l'on croit être un phénomène de bistabilité. Malheureusement, il est impossible de confirmer cette théorie puisque, pour l'instant, seulement des bulles rapides ont été observées.

## 6.2 Limitations de la solution proposée

Voici maintenant une liste des limitations de la solution proposée qui sont, pour certaines, intentionnelles ou alors issues de problèmes qui ont été rencontrés.

- Une seule interface fermée peut actuellement être résolue puisque les objectifs de ce projet demandaient la résolution d'une seule bulle. Afin de résoudre plusieurs interfaces, il sera nécessaire d'effectuer une réécriture de la gestion topologique de CADYF. Heureusement, cela fait partie des travaux en cours dans le laboratoire. De plus, des simulations d'interfaces ouvertes ont déjà été effectuées, mais elles demandent une intervention particulière à l'intérieur du code par l'utilisateur puisque les conditions aux limites de l'interface ne sont pas traitées automatiquement.
- Tel que discuté auparavant, la gestion des changements topologiques n'est pas automatique. Il nous faut donc implémenter une méthode qui permettra d'effectuer la coalescence et la fragmentation des interfaces. Il s'agit également d'un travail en cours au laboratoire.
- Actuellement, seulement les éléments de type P1-P1 sont disponibles à la résolution de l'interface fluide-fluide. Ce choix d'éléments est survenu à la suite de problèmes qui ont été rencontrés lors de l'implémentation pour des éléments de degrés supérieurs. En effet, la méthode développée prévoyait initialement l'utilisation d'éléments P2-P1 (Taylor-Hood). Or, des problèmes nous ont forcés à utiliser des éléments P1-P1.
- Tel que mentionné au chapitre 3, la méthode d'adaptation  $hp$  se base sur une estimation de l'erreur afin d'effectuer son choix d'ordre et de pas de temps. Cependant, cette estimation n'utilise que la solution de la vitesse alors que les simulations d'interface fluide-fluide font également intervenir les déplacements du maillage et les contraintes. De plus, ces dernières variables constituent une part importante de la solution d'un écoulement diphasique qui n'est donc pas pris en compte lors de l'estimation de l'erreur. Ceci se traduit en un choix trop élevée du prochain pas de temps ce qui fait alors diverger la solution. En pratique, l'utilisateur doit alors définir un pas de temps maximal à la solution se qui limite l'efficacité de la méthode adaptative.

### 6.3 Améliorations futures

Voici maintenant quelques améliorations possibles à la solution et des travaux futurs que l'on propose.

- La gestion des changements topologiques et de plusieurs interfaces permettrait, entre autres, de simuler des problèmes plus complexes tels que l'injection des bulles d'air dans l'eau. Ce type de simulation pourrait nous offrir plus d'information en rapport aux observations expérimentales.
- L'implémentation d'éléments de degrés supérieurs permettrait d'augmenter la précision de la méthode tout en réduisant le nombre de noeuds nécessaires. Il serait alors intéressant de réfléchir à une différente implémentation permettant l'utilisation d'éléments de degré 2 ou plus.
- Afin de tirer profit au maximum de l'adaptation  $hp$  de la méthode BDF, il serait intéressant d'ajouter les variables du pseudo-solide et des contraintes à l'estimation de l'erreur.
- Actuellement, le code de calcul CADYF ne permet pas la distribution de la mémoire sur plusieurs ordinateurs. Afin d'utiliser des machines parallèles ou des serveurs de calcul pour nos simulations, il faudrait permettre à CADYF de distribuer sa mémoire à l'aide d'une interface de type MPI (Message Passing Interface).
- Il serait intéressant d'étudier le couplage entre l'instabilité de la trajectoire de la bulle et l'instabilité de son sillage. Il a été démontré que les deux sont liés, mais aucune étude numérique n'a été effectuée à l'aide d'un modèle avec une interface déformable.

## RÉFÉRENCES

- L. Amaya-Bower et T. Lee, “Single bubble rising dynamics for moderate reynolds number using lattice boltzmann method”, *Computers & Fluids*, vol. 39, no. 7, pp. 1191–1207, 2010. DOI : 10.1016/j.compfluid.2010.03.003
- G. Anjos, N. Borhani, N. Mangiavacchi, et J. Thome, “A 3d moving mesh finite element method for two-phase flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 270, pp. 366–377, 2014. DOI : 10.1016/j.jcp.2014.03.067
- M. Annaland, W. Dijkhuizen, et N. D. J. Kuipers, “Numerical simulation of behavior of gas bubbles using a 3-d front-tracking method”, *AIChE Journal*, vol. 52, no. 1, pp. 99–110, 2006. DOI : 10.1002/aic.10607
- G. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, 14e éd. New York : Cambridge University Press, 2010.
- D. Bhaga et M. Weber, “Bubbles in viscous liquids : shapes, wakes and velocities”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 105, pp. 61–85, 1981.
- T. Bonometti et J. Magnaudet, “An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. validation and application to bubble dynamics”, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 33, no. 2, pp. 109–133, 2007.
- F. Brezzi et M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element method*. New York : Springer, 1991.
- A. Brooks et T. Hughes, “Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 32, no. 1-3, pp. 199–259, 1982.
- C. Béguin, S. Étienne, et M. Pettigrew, “Effect of dispersed phase fraction on the drag coefficient of a droplet or a bubble in an idealized two-phase flow”, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 65, pp. 339–349, 2017. DOI : 10.1016/j.euromechflu.2017.05.009
- G. Celata, M. Cumo, D. D’Annibale, P. D. Marco, et A. T. C. Zovini, “Effect of gas injection mode and purity of liquid on bubble rising in two-component systems”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 31, p. 37–53, 2006. DOI : 10.1016/j.expthermflusci.2005.08.006

R. Clift, J. Grace, et M. Weber, *Bubbles, Drops and Particles*. New York : Academic Press inc., 1978, vol. 94.

J. Donea, A. Huerta, et J. P. A. Rodríguez-Ferran, “Arbitrary lagrangian–eulerian methods”, dans *Encyclopedia of Computational Mechanics. Volume 1 : Fundamentals*, E. S. ans R de Borst et T. Hughes, édés. Wiley, 2004.

P. Duineveld, “The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high reynolds number”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 292, pp. 325–332, 1995.

R. Fdhila et P. Duineveld, “The effect of surfactant on the rise of a spherical bubble at high reynolds and peclet numbers”, *Physics of Fluids*, vol. 8, no. 2, pp. 310–321, 1996.

M. Gadala et J. Wang, “Simulation of metal forming prosses with finite element methods”, *International Journal for Numerical Merhods in Engineering*, vol. 44, p. 1397—1428, 1999.

V. Gopala et B. van Wachem, “Volume of fluid methods for immiscible-fluid and free-surface flows”, *Chemical Engineering Journal*, vol. 141, pp. 204–221, 2008.

F. Harlow et J. Welch, “Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface”, *Physics of Fluids*, vol. 8, no. 12, pp. 2182–2189, 1965. DOI : 10.1063/1.1761178

A. Hay, K. Yu., S. Etienne, A. Garon, et D. Pelletier, “High-order temporal accuracy for 3d finite-element ALE flow simulations”, *Computers & Fluids*, vol. 100, pp. 204–217, 2014.

A. Hay, S. Etienne, D. Pelletier, et A. Garon, “hp-adaptive time integration based on the bdf for viscous flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 291, pp. 151–176, 2015.

C. Hirt et B. Nichols, “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”, *Journal of Computational Physics*, vol. 39, 1981.

J. Hua, J. Stene, et P. Lin, “Numerical simulation of 3d bubbles rising in viscous liquids using a front tracking method”, *Journal of Computational Physics*, vol. 227, no. 6, pp. 3358–3382, 2008. DOI : 10.1016/j.jcp.2007.12.002

T. J. R. Hughes, L. P. Franca, et G. M. Hulbert, “A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 73, no. 2, pp. 173–189, 1989. DOI : 10.1016/0045-7825(89)90111-4

- T. Hughes, W. Liu, et T. Zimmermann, “Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 29, no. 3, pp. 329–349, 1981.
- E. Klaseboer, J. Chevaillier, A. Maté, O. Masbernat, et C. Gourdon, “Model and experiments of a drop impinging on an immersed wall”, *Physics of Fluids*, vol. 13, no. 1, pp. 45–57, 2001. DOI : 10.1063/1.1331313
- L. Kobbelt, P. Schröder, M. Kazhdan, T. Funkhouser, et S. Rusinkiewicz, “Rotation Invariant Spherical Harmonic Representation of 3D Shape Descriptors”, *Proc 2003 Eurographics*, vol. 43, 2003.
- V. Kushch, A. Sangani, P. Speltz, et D. Koch, “Finite-weber-number motion of bubbles through a nearly inviscid liquid”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 460, pp. 241–280, 2002. DOI : 10.1017/S0022112002008145
- P. Lakshmanan et P. Ehrhard, “Marangoni effects caused by contaminants adsorbed on bubble surfaces”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 647, pp. 143–161, 2010.
- H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6e éd. New York : Dover publications, 1945.
- D. Legendre, J. Magnaudet, et G. Mougin, “Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 497, pp. 133–166, 2003. DOI : 10.1017/S0022112003006463
- D. Legendre, R. Zenit, et J. Velez-Cordero, “On the deformation of gas bubbles in liquids”, *Physics of Fluids*, vol. 24, no. 4, 2012.
- S. Lortie, “Simulation d’écoulements à surface libre entre un liquide et un gaz compressible”, Mémoire de maîtrise, Ecole Polytechnique de Montréal, août 2018.
- R. Löhner et C. Yang, “Improved ale mesh velocities for moving bodies”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, no. 10, pp. 599–608, 1996.
- J. Magnaudet et I. Eames, “The motion of high-reynolds-number bubbles in inhomogeneous flows”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 32, pp. 659–708, 2000.
- S. McKee, M. Tome, V. Ferreira, A. C. J.A. Cuminato, F. Sousa, et N. Mangiavacchi, “Review : the mac method”, *Computers & Fluids*, vol. 37, pp. 907–930, 2008. DOI : 10.1016/j.compfluid.2007.10.006

R. Mei, J. Klausner, et C. Lawrence, “A note on the history force on a spherical bubble at finite reynolds number”, *Physics of Fluids*, vol. 6, no. 1, pp. 418–420, 1994.

M. Meyer, M. Desbrun, P. Schr, et A. Barr, “Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds”, dans *Visualization and Mathematics III*, 2002, pp. 35–57.

J. Monaghan, “Simulating free surface flows with sph”, *Journal of Computational Physics*, vol. 110, no. 2, pp. 399 – 406, 1994. DOI : [h10.1006/jcph.1994.1034](https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1034)

D. Moore, “The boundary layer on a spherical gas bubble”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 16, no. 2, pp. 161–176, 1963.

——, “The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 23, no. 4, pp. 749–766, 1965.

F. Muttin, T. Coupez, et M. Bellet, “Lagrangian finite-element analysis of time-dependent viscous free-surface flow using an automatic remeshing technique : Application to metal casting flow”, *International Journal for Numerical Merhods in Engineering*, vol. 36, pp. 2001–2015, 1993.

W. Noh et P. Woodward, “Slic (simple line interface calculation)”, dans *5th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 1976. En ligne : <https://www.osti.gov/servlets/purl/7261651-xagqbi/>

S. Osher et J. Sethian, “Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations”, *Journal of Computational Physics*, vol. 79, no. 1, pp. 12–49, 1988. DOI : [10.1016/0021-9991\(88\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90002-2). En ligne : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999188900022>

E. Pelletier, “Etude expérimentale et modélisation de l’impact entre une bulle et une structure”, Mémoire de maîtrise, Ecole Polytechnique de Montreal, octobre 2014.

E. Pelletier, C. Béguin, et S. Étienne, “Experiments of air bubbles impacting a rigid wall in tap water”, *Physics of Fluids*, vol. 27, no. 12, 2015.

B. Perot et R. Nallapati, “A moving unstructured staggered mesh method for the simulation of incompressible free-surface flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 184, no. 1, pp. 192–214, 2003. DOI : [10.1016/S0021-9991\(02\)00027-X](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(02)00027-X)

F. Peters et C. E. Christian, “An experimental study on slow and fast bubbles in tap water”, *Chemical Engineering Science*, vol. 82, pp. 194–199, 2012. DOI :

10.1016/j.ces.2012.06.061

S. Quan et D. Schmidt, “A moving mesh interface tracking method for 3d incompressible two-phase flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 221, no. 2, pp. 761–780, 2007. DOI : 10.1016/j.jcp.2006.06.044

M. Quecedo et M. Pastor, “Application of the level set method to the finite element solution of two-phase flows”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, no. 1, p. 645–663, 2001.

J. Reddy, *An introduction to the finite element method*, 3e éd. New York : McGraw-Hill Education, 1993.

J. Rider et D. Kothe, “Stretching and tearing interface tracking methods”, dans *12th AIAA CFD Conference*, 1995.

P. Roache, “Code verification by the method of manufactured solutions”, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 124, pp. 4–10, 2002. DOI : 10.1115/1.1436090

P. Sackinger, P. Schunk, et R. Rao, “A newton-raphson pseudo-solid domain mapping technique for free and moving boundary problems : a finite element implementation”, *Journal of Computational Physics*, vol. 125, no. 1, pp. 83–103, 1996. DOI : 10.1006/jcph.1996.0081

M. Sussman et E. Puckett, “A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 162, pp. 301–337, 2000.

S. Takagi et Y. Matsumoto, “Force acting on a rising bubble in a quiescent liquid”, *Japanese Journal of Multiphase Flow*, vol. 10, no. 3, 1996.

—, “Surfactant effects on bubble motion and bubbly flows”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 43, pp. 615–636, 2011.

T. Tezduyar, “Stabilization parameters and local length scales in SUPG and PSPG formulations”, dans *5th World Congress on Computational Mechanics*, 2002. En ligne : [https://www.researchgate.net/profile/Tayfun\\_Tezduyar/publication/303737906\\_Stabilization\\_Parameters\\_and\\_Local\\_Length\\_Scales\\_in\\_SUPG\\_and\\_PSPG\\_Formulations/links/5750128508aefe968db720b7.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Tayfun_Tezduyar/publication/303737906_Stabilization_Parameters_and_Local_Length_Scales_in_SUPG_and_PSPG_Formulations/links/5750128508aefe968db720b7.pdf)

A. Tomiyama, G. Celata, S. Hosokawa, et S. Yoshida, “Terminal velocity of single bubbles in surface tension force dominant regime”, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 28,

no. 9, pp. 1497–1519, 2002. DOI : 10.1016/S0301-9322(02)00032-0

D. Torres et J. Brackbill, “The point-set method : front-tracking without connectivity”, *Journal of Computational Physics*, vol. 165, pp. 620–644, 2000.

Z. Tukovic et H. Jasak, “A moving mesh finite volume interface tracking method for surface tension dominated interfacial fluid flow”, *Computers & Fluids*, vol. 55, pp. 70–84, 2012. DOI : 10.1016/j.compfluid.2011.11.003

S. Unverdi et G. Tryggvason, “A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 100, pp. 25–37, 1992.

M. Wu et M. Gharib, “Experimental studies on the shape and path of small air bubbles rising in clean water”, *Physics of Fluids*, vol. 14, no. 7, pp. 49–52, 2002. DOI : 10.1063/1.1485767

T. Yamada et F. Kikuchi, “An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for incompressible hyperelasticity”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 102, no. 2, pp. 149–177, 1993.

B. Yang, A. Prosperetti, et S. Takagi, “The transient rise of a bubble subject to shape or volume changes”, *Physics of Fluids*, vol. 15, no. 9, pp. 2640–2648, 2003. DOI : 10.1063/1.1592800

D. Youngs, “Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion, numerical methods for fluid dynamics”, dans *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, K. Morton et M. Norman, éd. Cambridge : Academic Press, 1982, pp. 273–285.

S. Étienne, A. Garon, et D. Pelletier, “Perspective on the geometric conservation law and finite element methods for ale simulations of incompressible flow”, *Journal of Computational Physics*, vol. 228, no. 7, pp. 2313–2333, 2009. DOI : 10.1016/j.jcp.2008.11.032